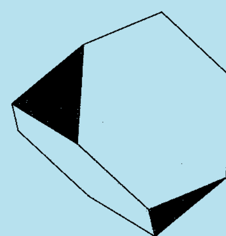
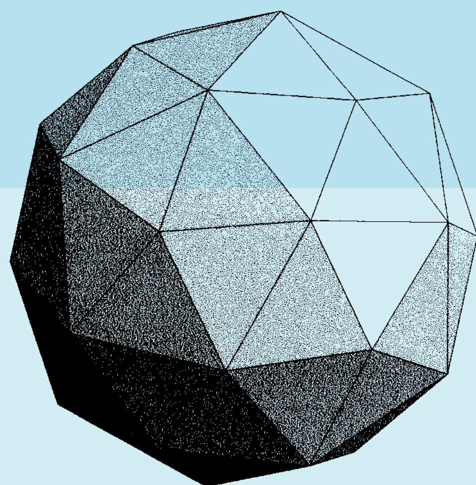
Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES

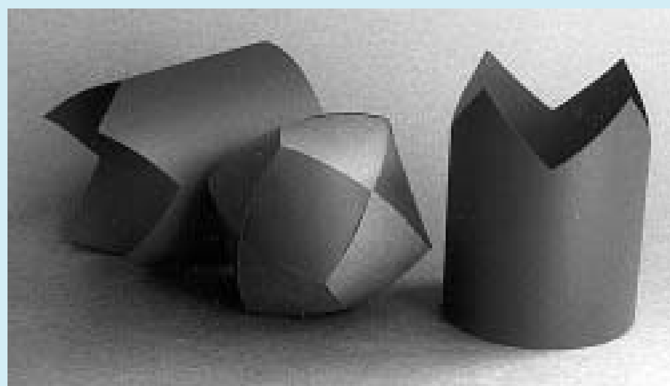
Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 74
1998-1999 mei
7





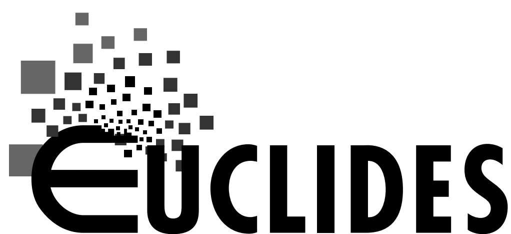




Het VAARDIG onderwijsmodel

Lineair programmeren in klokkengieterij

Ruitentwaalfsfeer



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem
e-mail: cph@xs4all.nl

Richtlijnen voor artikelen:
- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Richtlijnen voor mededelingen:
- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.euronet.nl/~nvvw

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: mkommer@knoware.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8
8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail:
wkuipers@worldonline.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: NVvW@euronet.nl

Contributie per ver. jaar: ƒ 80,00
Studentleden: ƒ 40,00
Leden van de VVWL: ƒ 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: ƒ 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer. Abonnementsprijs voor personen: ƒ 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: ƒ 240,00 per jaar. Betaling geschiedt per acceptgiro. Losse nummers op aanvraag leverbaar voor ƒ 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891
e-mail lbozuwa@worldonline.nl

Adresgegevens auteurs

R. Bosch
Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

L. van den Broek
Graafseweg 387
6832 ZN Nijmegen

M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk

F. Kortenhagen
IVLOS
Heidelberglaan 8
3584 CS Utrecht

W. Kuipers
Waalstraat 8
8052 AE Hattem

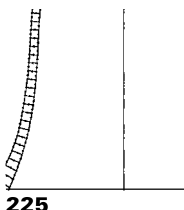
B. Lagerwerf
Groen van Prinstererstraat 23
6828 VW Arnhem

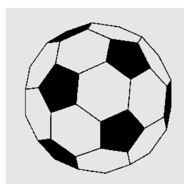
T. Lecluse
Het Nieuwe Lyceum
Jan Steenlaan 38
3723 BV Bilthoven

M. Lehr
Arend Lamerslaan 6
6816 PT Arnhem

A.K. van der Vegt
Hof van Delftlaan 47
2613 BK Delft

Inhoud


225


229


237

van de redactietafel

Het schooljaar loopt alweer ten einde. De examens staan voor de deur of zijn inmiddels al begonnen. Bij deze examens zijn er een aantal die bijzondere aandacht vragen.

Vwo wiskunde B

Het examen vwo wiskunde B is het eerste examen op het vwo dat afgenomen zal worden bij leerlingen die in 1993 in de brugklas gestart zijn met het nieuwe leerplan. Er is de afgelopen jaren veel gesproken over de aansluitingsproblematiek tussen de onderbouw en de bovenbouw. In dit examen zal blijken in hoeverre docenten en leerlingen met veel inspanningen in staat zijn geweest het gewenste niveau te halen.

Vwo wiskunde B, experimenteel

Elf scholen zullen dit jaar meedoen aan het experimentele examen vwo wiskunde B (profi). Een examen dat in ligt tussen het toekomstige vwo wiskunde B1 examen (N&G) en het vwo wiskunde B12 examen (N&T). De leerlingen zullen op het examen gebruik maken van een grafische rekenmachine.
Dit examen zal een indicatie kunnen geven van de richting en de moeilijkheidsgraad van de toekomstige examens. Het volledige examen zal waarschijnlijk binnenkort wel te vinden zijn in de Nieuwe Wiskrant.

Vbo/mavo C/D

Op vbo en mavo wordt inmiddels voor de derde keer een landelijk examen volgens het nieuwe leerplan afgenomen. De eerste keer, in 1997, was het examen bewust aan de gemakkelijke kant gehouden. Vorig jaar was het alweer een stuk lastiger voor veel leerlingen. In het examen van dit jaar is mogelijk te zien naar welke kant de trend uitgaat.

Examennummer

In nummer 1 van de volgende jaargang zullen wij weer uitvoerig verslag doen van alle resultaten. Heeft u opmerkingen over de examens? Zijn u bijzondere zaken opgevallen? Zijn er opvallende leerlingresultaten te melden?
In het examennummer is er ruimte om uw stem te laten horen. Uw reacties zouden dan wel voor het einde van het schooljaar bij de redactie binnen moeten zijn.

De redactie van Euclides

Op 1 april vinden altijd een aantal wijzigingen plaats in de redactie van Euclides. Bram van der Wal heeft na 12 jaar de redactie verlaten. Met veel energie en hartstocht heeft hij al die tijd een lans gebroken voor de vbo- en ivbo-leerlingen. Zijn aftreden laat een gat vallen in de redactie. Wij roepen dan ook expliciet mensen op uit vbo/mavo die behulpzaam willen zijn om de komende jaren in Euclides meer aandacht te besteden aan het vbo/mavo. Met de omvorming naar het vmbo is dat zeker hard nodig. Meld u bij de redactie!
Freek Mahieu was de vertegenwoordiger uit het bestuur bij de redactie. Met zijn aftreden uit het bestuur is nu ook zijn bemoeienis met de redactie ten einde gekomen. Freek heeft vele jaren een belangrijke brugfunctie vervuld tussen bestuur en redactie. Marian Kollenveld zal zijn taak overnemen.
Gelukkig hebben we ook weer een aantal nieuwe redacteuren kunnen strikken. Johannes Sinnema is eerstegraadsdocent wiskunde in Leeuwarden. Internet en de Tweede Fase zijn onderwerpen waar zijn interesse naar uitgaan.
Hans Daale is sectormanager in het hbo. Hij is onder andere betrokken bij het LICA, dat zich bezighoudt met de aansluiting havo-hbo.
De redactie hoopt met hun inbreng de diversiteit van de artikelen in Euclides ook de komende jaargangen weer te waarborgen.

Kees Hoogland

Het VAARDIG onderwijsmodel

Bram Lagerwerf, Fred Korthagen

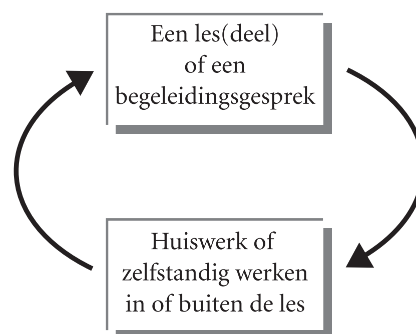
VAARDIG®

Inleiding

Binnen het Nederlandse onderwijs is de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs in zekere zin toonaangevend. Wiskundedocenten zijn al lang gericht op het bevorderen van zelfstandig leren. Al jaren is het gebruikelijk dat zij aan hun leerlingen vragen hun antwoorden te controleren en erbij te zetten hoe ze er aan gekomen zijn. Ze doen dat om aandacht te kunnen vragen voor de manier van oplossen. Er zijn meer van zulke detail-aanpakken waarmee het wiskundeonderwijs vóórloopt: bij het huiswerk bespreken regelmatig een opgave nemen waar niemand moeite mee had, bij het huiswerk opgeven even met de klas nagaan hoe moeilijk het is, en dergelijke. Met het VAARDIG onderwijsmodel willen we die detail-aanpakken verenigen tot één onderwijsmethode. Daardoor kunnen de puntjes op de i worden gezet, overigens zonder de docenten in een keurslijf te dwingen.

Ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs

Het VAARDIG onderwijsmodel verenigt, zoals gezegd, een aantal ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. We noemen er enkele. Docenten zijn meer dan vroeger geneigd de leerlingen aan het werk te zetten met realistische problemen, met de leerlingen te praten over hoe ze die problemen aanpakken, de leerlingen aan het denken te zetten over alternatieve oplossingsmogelijkheden, de leerlingen aan het denken te zetten over de kwaliteit van hun antwoorden (Is dat antwoord goed? Kun je dat uitleggen?), met de leerlingen te praten over ervaringen waar nieuwe opdrachten op voortborduren (Wie heeft zoiets als in deze opgave wel eens meegemaakt?), eigen constructies van leerlingen te vragen (Bedenk zelf opgaven voor het proefwerk. Maak een eigen samenvatting. Een werkstuk).
In al deze situaties worden de leerlingen geactiveerd zelf iets te doen waar de docent zich even – of langere tijd – niet mee bemoeit. Dat is de kern van de zaak: de docent daagt de leerlingen uit zelfstandig een prestatie te leveren. Bij die prestatie houdt hij zich afzijdig, maar er voor en er na geeft hij zorgvuldig leiding. Dit is voorts geen eenmalig gebeuren maar een steeds terugkerend patroon. Het is een cyclus:



De rol van een onderwijsmodel

De grondslag voor deze ontwikkeling in het wiskundeonderwijs zijn nieuwe inzichten over leren en onderwijzen. Meest kenmerkend voor die nieuwe inzichten is het principe dat leerlingen beter leren door zelf geschikte problemen op te lossen, dan door de *voordoen–nadoen–methode.* Zo'n korte typering vraagt natuurlijk om nuanceringen. In het VAARDIG-model zijn die nuanceringen systematisch uitgewerkt. Daar zijn twee *kernvragen* bij: als je serieus neemt dat leerlingen beter leren door zelf te doen dan door te luisteren en te kijken, *wat* moet je ze dan laten doen en *hoe* moet je dat begeleiden? Door de systematische benadering ontstaat een samenhangende checklist waaruit docenten ideeën kunnen opdoen en waaraan ze hun werk kunnen toetsen. Het VAARDIG-model is dus geen receptuur, maar meer een professioneel geweten. Het stelt vragen in de trant van: Heeft u wel gedacht aan …?, Hoe wilt u …?, en dergelijke. Het geeft daarbij ook allerlei mogelijkheden om in een specifieke situatie antwoorden op die vragen te vinden.

Het VAARDIG-model

Het VAARDIG-model heeft twee invalshoeken. Enerzijds geeft het een fasering van een les(deel) of

een begeleidingsgesprek in drie fasen: *Voortgang bespreken*, *Aansluiten* en *Afspraken maken*. Anderzijds is er een viertal onderwijskundige principes*: Reflectie bevorderen*, *Dubbele doelen nastreven*, *Individueel benaderen* en *de Groep gebruiken*. Deze principes helpen de docent bij het concreet vorm geven van de les of begeleiding. Met elkaar vormen de beginletters van deze zeven elementen het woord VAARDIG. Het VAARDIG-logo laat twaalf lege hokjes zien; daarin kan worden ingevuld hoe de vier onderwijskundige principes in de drie fasen van de les kunnen worden toegepast. Bijvoorbeeld kan in het lege hokje linksboven worden ingevuld, hoe bij de leerlingen in de fase Voortgang bespreken de Reflectie kan worden gestimuleerd. We bespreken nu de hoofdpunten uit het model.

De VAA-fasering

De fasering van het VAARDIG-model sluit sterk aan bij wat lang in veel wiskundelessen gebruikelijk is geweest: eerst het gemaakte huiswerk bespreken, dan de bespreking van de nieuwe leerstof en tenslotte het nieuwe huiswerk opgeven. Het VAARDIG-model legt echter verschillende andere accenten. Bij de Voortgangsbespreking ligt het accent bijvoorbeeld minder op wat er niet is gelukt, maar meer op wat er van het gemaakte werk geleerd is en hoe dat kan worden gebruikt bij het nieuwe huiswerk. In de fase Aansluiten ligt het accent op continuïteit: is het voorgaande voldoende verwerkt en hoe kan het volgende worden aangepakt? In de derde fase ligt het accent minder op opdrachten geven en meer op Afspraken maken.

Voortgang bespreken; wat levert het gedane werk de leerlingen op?

Het accent ligt niet op problemen waar de leerlingen niet uitgekomen zijn, zoals vroeger.

Uitwerken wat succesvol was
Het is belangrijk dat de leerlingen zich goed bewust worden van de manier van werken die voor hen succes had. Die werkwijze moet ‘in kaart gebracht worden’ zodat ze er voor zichzelf een genuanceerd beeld van opbouwen en de werkzame principes leren toepassen. Bijvoorbeeld bij de formele oplossing van vergelijkingen:
Bij het oplossen van lineaire vergelijkingen breng je alles met x naar links en de rest naar rechts want dan kun je x buiten haakjes halen en daarna links en rechts delen door wat tussen die haakjes overblijft. Bij tweedegraads vergelijkingen lukt dat vaak niet doordat je dan tussen de haakjes iets met x overhoudt. Bij die tweedegraads vergelijkingen breng je alles naar links en dan probeer je te ontbinden zodat je een product krijgt dat gelijk is aan nul (of je gebruikt de abc-formule).
Zo’n beeld krijgen de leerlingen niet voor ogen als de docent de cursieve zinnen op het bord schrijft en laat leren. Het ontstaat wanneer de leerlingen bij herhaling werken met vergelijkingen zodat ze erváren hoe het werkt, en er vervolgens met de docent zó over praten dat ze er zelf een formulering voor kunnen geven.
Voor de opbouw van dit vergelijkingenbeeld moeten overigens in de lagere klassen eerst andere beelden worden opgebouwd: het beeld van hoe werkwijzen in formules te vangen zijn, het beeld van hoe het vergelijken van werkwijzen tot vergelijkingen leidt en het beeld van wat het oplossen van een vergelijking inhoudt.

Professionele nieuwsgierigheid
Voor zo’n manier van werken hebben docenten een *professionele nieuwsgierigheid* nodig. Ze moeten echt benieuwd zijn naar hoe de leerlingen hebben gewerkt zodat ze dóórvragen tot ze precies weten hoe het gedaan is en nog verder dóórvragen, om te zien wat de leerlingen kunnen bedenken om uit te leggen dat het goed is wat ze gedaan hebben. Docenten die zo’n professionele nieuwsgierigheid missen, komen al gauw in de verleiding met een half woord van de leerlingen genoegen te nemen en het met eigen deskundige woorden aan te vullen: ‘Eigenlijk bedoelt Ali dat …’, of iets dergelijks. En dan komt er toch weer een door de docent bedachte zin op bord. De nieuwsgierige docent vraagt bijvoorbeeld aan het eind van de bespreking: ‘Wat schrijven we nu op?’

Ook bij onvolkomenheden belonen wat succesvol was
Voor de hier beschreven manier van werken hebben docenten ook de houding nodig om *te letten op wat goed gegaan is en dat te belonen.* Belonen wat goed is motiveert meer dan aanstrepen wat fout is. Bovendien leidt het de aandacht van de leerlingen meer naar wat ze aan het leren zijn en minder naar ‘hoe het had gemoeten’. Een effectieve manier van helpen bij problemen is met de leerlingen zoeken naar tot hoever het goed gegaan is en waaraan je kunt zien dat het tot zover goed ging. Wanneer dat duidelijk is, liggen correcte manieren van verder gaan meestal voor de hand.

Aansluiten; welke opgaven zorgen nu voor continuïteit in het leren?

Docent en leerlingen bereiden het (huis)werk steeds samen voor. De docent zorgt dat dit werk aansluit

bij waar de leerlingen gebleven zijn en dat het de leerlingen in de goede richting verder helpt. De basis is dat de leerlingen voor herkenbare problemen worden gesteld en dat ze bij de oplossing daarvan optimaal gebruik zullen kunnen maken van wat ze al bereikt hebben. Goede schoolboeken nemen de docent hier veel werk uit handen. Toch blijven enkele zaken aandacht vragen:

- Hebben de leerlingen het voorgaande voldoende verwerkt en zijn ze daarmee toe aan de nieuwe taken of zijn er – mondelinge of schriftelijke - overbruggingsopdrachten nodig?
- Kunnen de opdrachten uit het boek de leerlingen voldoende aanspreken of moet daar nog een verduidelijkend of motiverend gesprek over worden gevoerd?
- Zijn de opdrachten haalbaar in de ogen van docent en leerlingen of moeten de leerlingen op weg worden geholpen?

Zorgzaam en uitdagend
De docent is dus zorgzaam; hij doet wat nodig is om de leerlingen succes te laten ervaren bij het zelfstandig uitvoeren van hun taken. Maar de leerlingen worden niet onnodig in de watten gelegd. De docent daagt de leerlingen uit niet met minder genoegen te nemen dan ze kunnen.

Afspraken maken; kunnen de leerlingen verantwoordelijkheid nemen voor het geplande werk?

Er is voor de leerlingen een groot emotioneel verschil tussen (huis)werk afspreken en huiswerk opgedragen krijgen. Afspraken maken benadrukt dat de docent de leerlingen zoveel mogelijk als zelfstandige wil benaderen. Maar adeldom verplicht. Leerlingen nemen alleen verantwoordelijkheid voor taken die in hun ogen de moeite waard en haalbaar zijn. Dat vraagt nogal wat van de docent, temeer waar die taken ook nog een rijke leeromgeving moeten vormen. Maar leerlingen die het werk afgesproken hebben zullen zich daarvoor ook moeten inzetten; docenten kunnen hen zo nodig daarop aanspreken.

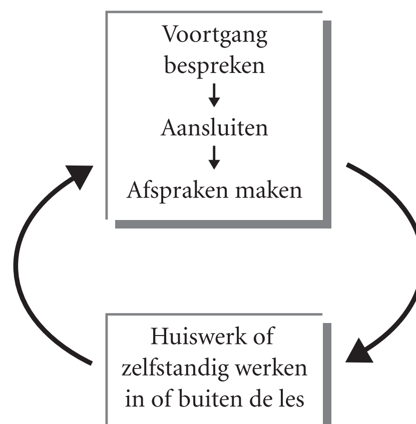
Kan dat, afspraken maken met een klas?
Veel docenten associëren *afspraken maken* meer met begeleidingsgesprekken dan met klassikale lessen. Toch is het heel goed mogelijk met een hele klas echte afspraken te maken. Bijvoorbeeld door bij het opgeven van het huiswerk te vragen: ‘Lukt dat?’, of: ‘Is dat OK?’ Daar hoeft niet elke leerling bevestigend op te antwoorden. Het is voldoende wanneer de docent even vragend de klas rondkijkt en van een of enkele leerlingen een expliciete bevestiging vraagt: ‘Cécile ook?’ Wanneer leerlingen bezwaren maken zal daarop in een gesprekje duidelijk moeten worden hoe reëel die bezwaren zijn en of en hoe daaraan tegemoet kan worden gekomen.

Willen leerlingen wel afspraken maken?
Een ander terugkerend punt van discussie is dat veel docenten menen dat leerlingen geen afspraak willen maken omdat ze er steeds op uit zijn het schoolwerk te minimaliseren. Deze gedachte is niet op feiten gebaseerd. Vrijwel alle leerlingen zijn heel realistisch als het gaat over de vraag hoe er gewerkt moet worden. Wel kan het van tijd tot tijd nodig zijn met hen te praten over hun lange-termijn-doelstelling, want die verdwijnt soms gemakkelijk uit het zicht in het licht van allerlei korte-termijn-plannen die ze hebben.

Uitnodigend en vasthoudend
Deze manier van werken vraagt van de docent enerzijds een uitnodigende houding: ‘Willen jullie het werk dat ik voorstel accepteren?’ Anderzijds zal de docent vasthoudend moeten zijn: ‘Wie deze opleiding volgt zal er zich voor moeten inzetten!’. Deze dubbele houding kan alleen geloofwaardig zijn als de leerlingen voldoende kunnen kiezen en genoeg hulp krijgen bij hun keuze – bijvoorbeeld bij het doorzien van de consequenties van de verschillende keuzemogelijkheden.

Het begeleiden van zelfstandig werken en leren

Wanneer leerlingen zelfstandig werken, blijft er voor de docenten dus nog veel te doen. De zelfstandigheid van de leerlingen is in de context van de school altijd beperkt. De aandacht van de leerlingen is er veelal op gericht het werk af te krijgen. Voor het expliciet maken van het *leerresultaat* van dat werk is vrijwel altijd hulp van de docent nodig. Als begeleider heeft de docent er ook belang bij dat hij zicht houdt op de vorderingen van het werk en van het leren. Heeft hij dat zicht niet, dan dreigt hij al gauw buiten spel te komen staan en daarmee staat de leerling in de kou. Uiteindelijk is de docent ook verantwoordelijk voor de kwaliteitsbeoordeling van wat de leerlingen doen. Dat kan meestal niet wachten tot het proefwerk of eindbeoordeling; tussentijdse beoordelingen geven de mogelijkheid bij te sturen. Als we preciezer kijken naar de cyclus van met en zonder begeleiding werken ziet die er dus zo uit:



Normale getallen

Bij hoeveel getallen tot 100 komt het cijfer 2 niet voor in de decimale schrijfwijze van dat getal? Deze vraag is eenvoudig te beantwoorden door alle getallen tot 100 waarin het cijfer 2 voorkomt, op te schrijven.

$2, 12, 20, 21, \ldots, 29, 32, 42, \ldots, 92$

Er zijn 19 getallen met een 2 en dus is het antwoord op de gestelde vraag 81. Anders gezegd, het percentage getallen onder de 100 waarvan de decimale schrijfwijze geen cijfer 2 bevat, is 81%.
Voor de getallen tot 1000 kunnen we dezelfde vraag ook eenvoudig beantwoorden, zij het met wat meer uitschrijfwerk. In het eerste en het derde tot en met het negende honderdtal is het aantal getallen met een 2 weer 19. Het tweede honderdtal bevat 100 getallen met een twee, zodat het totaal aantal getallen met een 2 op $100 + 9 \cdot 19 = 271$ komt. Het percentage van de getallen tot 1000 dat in zijn decimale schrijfwijze geen 2 bevat is dus 72,9%. Dit percentage wordt steeds kleiner, zo is het percentage 2-loze getallen tot en met $10^{100} - 1$ ongeveer 0,00265…%.
In het algemeen is het aantal getallen tot en met $10^k - 1$ dat geen cijfer 2 bevat in zijn decimale schrijfwijze gelijk aan 9^k. Een getal tot $10^k - 1$ kunnen we voorstellen door een rij van k cijfers, waarbij we een getal met minder dan k cijfers in zijn decimale schrijfwijze vooraf laten gaan door een aantal nullen. Als het getal geen cijfer 2 mag bevatten dan hebben we voor elk van de k posities 9 mogelijkheden. Het gevraagde aantal is derhalve 9^k.
Hieruit volgt dat het percentage getallen tot en met $10^k - 1$ dat geen 2 bevat in zijn decimale schrijfwijze gelijk is aan $(\frac{9}{10})^k$. Dit percentage gaat naar 0 als k groot wordt.

Stelling 1
Zij b een decimaal $0, 1, \ldots, 9$ en zij $D(b, N)$ het aantal getallen $\leq N$ dat geen b in zijn decimale schrijfwijze bevat. Dan geldt:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{D(b, N)}{N} = 0$$

Het getal 1111111001 is in zekere zin onregelmatig; er komen in de decimale schrijfwijze slechts 2 van de 9 cijfers voor. Het getal 1254367980 daarentegen is in dit opzicht regelmatig omdat het ieder cijfer even vaak bevat. In een getal als

1245766290137688310023452099874713579024 68

komt ieder cijfer ongeveer even vaak voor. Het getal bestaat uit 11,9% nullen, 9,5% enen, 11,9% tweeën, etcetera.

We kunnen bewijzen dat *bijna alle* natuurlijke getallen deze regelmaat vertonen, dat wil zeggen dat bijna alle natuurlijke getallen ongeveer 10% nullen, 10% enen, enzovoorts, bevatten. Bijna alle moeten we hier als volgt opvatten: als we tot een zeker natuurlijk getal N het percentage getallen waarin niet ieder cijfer ongeveer even vaak voorkomt, berekenen, dan gaat dat percentage naar 0 als N tot oneindig nadert.
Voor de reële getallen geldt iets soortgelijks. Een reëel getal heet *normaal* als in de decimale ontwikkeling van dat getal, de percentages nullen, enen, enzovoorts achter het decimaalteken alle ongeveer 10% zijn. Exacter geformuleerd:

Zij $r \in R$ en zij $C(b, n)$ het aantal cijfers b dat in de eerste n decimalen achter het decimaalteken voorkomt in de decimale ontwikkeling van r.
Het getal r heet normaal als

$$\lim_{N \to \infty} \frac{C(b, n)}{n} = 0{,}1 \text{ voor alle } b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$

Om $C(b, n)$ ook voor eindige decimale ontwikkelingen, zoals 2,55, te definiëren, denken we ons deze ontwikkeling aangevuld met een oneindige rij nullen. Dus 2,5500000….
Het is eenvoudig om niet normale getallen op te schrijven, het rationale getal 0,111111… en het irrationale getal 0,12112111211112… zijn twee voorbeelden. Men kan bewijzen dat *bijna alle* reële getallen normaal zijn. Omdat de verzameling R overaftelbaar is, moeten we het begrip 'bijna alle' hier uitdrukken door een maat.

Stelling 2 De verzameling normale getallen in het interval $[0, 1]$ heeft maat 1.

De repeterende breuk $0{,}\overline{1234567890}$ is een voorbeeld van een normaal getal. Dit getal is rationaal. Ondanks het feit dat bijna alle reële getallen op het interval $[0, 1]$ normaal zijn, valt het niet mee om een irrationaal normaal getal op te schrijven. Een voorbeeld van een zo'n irrationaal normaal getal is 0,01234567891011121314151617… Achter het decimaalteken hebben we de rij natuurlijke getallen opgeschreven.
Bewijzen dat een getal normaal is, is een moeilijke opgave. Zo is tot nu toe niet bekend of de getallen π en e normaal zijn.

Rob Bosch

Literatuur

Frits Beukers **Getaltheorie voor beginners**
Epsilon Uitgaven, Utrecht

Vier onderwijskundige principes

De vier onderwijskundige principes van het VAARDIG onderwijsmodel zijn her en der al langere tijd in het wiskundeonderwijs zichtbaar. Docenten zetten hun leerlingen aan het denken over zaken als product en proces, details en grote lijnen, of hun individuele streefniveau. Veel wiskundedocenten laten hun leerlingen met en van elkaar leren. We bespreken de vier onderwijskundige principes nu één voor één.

Reflectie bevorderen; kan ik de leerlingen systematisch aan het denken zetten over wat ze doen?

Reflecteren is systematisch terugkijken of vooruitzien. Bij wiskundeopgaven wordt het systeem bepaald door vragen als: 'Hoe heb je het gedaan?' 'Kun je dat uitleggen?' 'Zou het ook anders kunnen?' 'Heeft dat voordelen?' Maar wanneer leerlingen onvoldoende aan hun huiswerk toekomen zijn betere vragen bijvoorbeeld: 'Wat wil je hier op school bereiken?' 'Hoe wil je dat aanpakken?' 'Hoe realistisch is dat?' De kern is dezelfde: de leerlingen worden zó aan het denken gezet dat zij er wijzer van worden.

Dubbele doelen nastreven; kan ik de leerlingen stimuleren aandacht te geven aan de resultaten van hun werk én aan hoe ze te werk gegaan zijn?

Aandacht vragen voor hun manier van werken vraagt van de leerlingen dat zij zich bloot geven. Ze moeten iets van zichzelf laten zien, ze kunnen niet domweg nadoen wat de docent heeft voorgedaan. Daardoor krijgt het onderwijs meer diepgang. Leerlingen ervaren hun werk meer als iets van henzelf dan als iets van buiten. Leerresultaten worden hierdoor beter bruikbaar. Andere belangrijke dubbele doelen zijn: aandacht voor details én voor grote lijnen, en aandacht voor kortetermijn- én langetermijn-doelen.

Individueel benaderen; kan ik zo rekening houden met elke leerling dat die vooral op zijn of haar manier kan werken en leren?

Leerlingen hebben veel onderlinge verschillen, in emoties, aanleg, vaardigheden, afkomst, behoeften, leerstijlen, voorkeuren, enz. Wanneer leerlingen eigen keuzes maken worden die verschillen beter zichtbaar en kunnen ze beter worden gehonoreerd. Docenten zorgen dat de leerlingen regelmatig de ruimte krijgen voor een eigen aanpak. In wiskundelessen kan dat bijvoorbeeld door eigen oplossingsmethoden van de leerlingen te stimuleren en te bespreken. Leerlingen die in groepjes samenwerken hebben veel gelegenheid voor een eigen inbreng. Docenten kunnen klassikaal het (huis)werk van de leerlingen zo voorbereiden dat 80% ermee uit de voeten kan. Wanneer ze de klas aan het werk gezet hebben, zijn er dan niet zo veel vingers en is er voldoende tijd om de leerlingen die dat nodig hebben individueel te helpen. Bij individuele hulp is ook de eerder genoemde professionele nieuwsgierigheid nodig. Wanneer je als docent te weten kunt komen hoe een bepaalde leerling denkt, kun je met je hulp daarop aansluiten.

De Groep gebruiken; kan ik het onderwijs zo organiseren dat de leerlingen samen sterker staan?

Individueel en klassikaal onderwijs lijken tegenstellingen, maar in onze opvattingen vullen *Individueel benaderen* en *de Groep gebruiken* elkaar aan. Samen staan de leerlingen sterker, ze leren met, door en van elkaar. Bijvoorbeeld door aan elkaar uit te leggen wat ze doen en denken wanneer ze samen een opdracht uitvoeren. Er zijn de laatste tijd veel werkwijzen ontwikkeld om dit *teamleren* vorm te geven. Dat varieert van de leerlingen tijdens een klassikale les opdragen even twee aan twee een vraag te beantwoorden, tot de leerlingen langere tijd in groepjes te laten samenwerken.

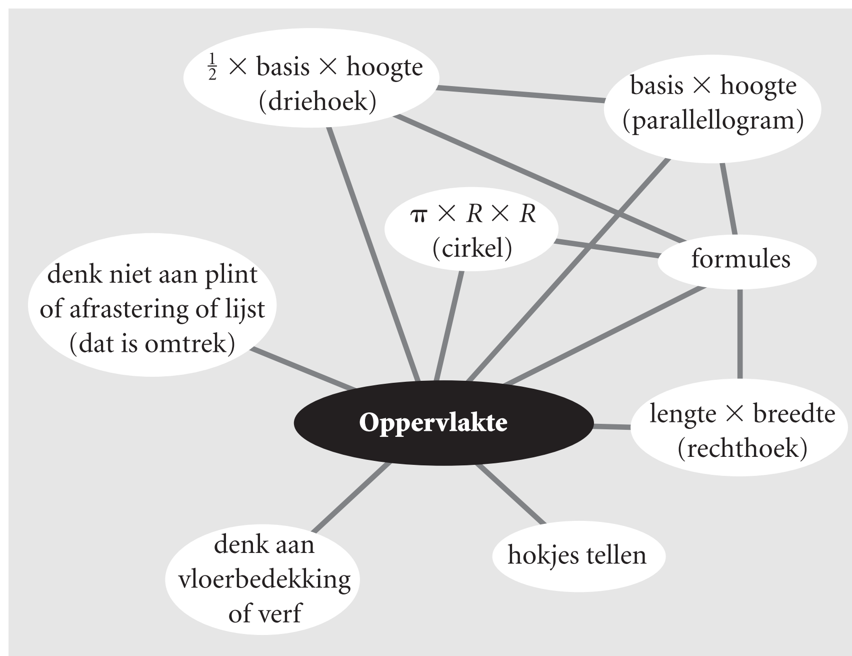
Enkele voorbeelden van uitwerkingen van de matrixvakjes

Tot slot geven we enkele voorbeelden van hoe vakjes in de VAARDIG-matrix kunnen worden gevuld.

Reflectie stimuleren in de fase Voortgang bespreken

V	A	A	
✕			R
			D
			I
			G

Soms beginnen docenten de Voortgangsbespreking met een herhaling van het voorgaande. De bedoeling is dat de leerlingen er weer ín kunnen komen. Wanneer docenten dat doen met een eigen betoog, is dat een gemiste kans. Ook met de beginvraag: 'Wie kan mij zeggen waar we het de vorige keer over gehad hebben?', wordt de situatie niet uitgebuit. Wanneer de leerlingen tussentijds onbegeleid aan het onderwerp gewerkt hebben, zijn er indringender leerervaringen opgedaan. Die kunnen bijvoorbeeld bij het hoofdstuk over *oppervlakte* expliciet gemaakt worden door de leerlingen in kleine groepjes een 'woordweb' te laten maken van het onderwerp:



Daarin geven ze, in een spinnenwebachtige constructie, aan, wat ze in het onderwerp belangrijk vinden en hoe die elementen met elkaar zijn verbonden. Daarmee zitten we overigens tegelijkertijd in het vakje linksonder, want er wordt bewust gebruik gemaakt van de Groep. De woordwebben kunnen interessante gesprekken opleveren. Kunnen de leerlingen vertellen hoe ze hun keuze gemaakt hebben? Kan de leerling die het lijntje tussen driehoek en parallellogram gezet heeft dat uitleggen?

Individueel benaderen in de fase Aansluiten

V	A	A	
			R
			D
	×		I
			G

Met name in de fase Aansluiten lukt het dikwijls niet, in een klassikale benadering genoeg rekening te houden met alle leerlingen. Is het voorgaande naar behoren verwerkt? Spreken de nieuwe opdrachten de leerlingen voldoende aan? Zijn die nieuwe opdrachten wel haalbaar in de ogen van de leerlingen? Wanneer de leerlingen daarna individueel aan het werk gezet worden, heeft de docent gelegenheid om de leerlingen over wie hij nog onzeker is even individueel te spreken. Het simpele vraagje ‘Lukt het?’ is een goede start voor een ‘mini-voortgangsbespreking’, het kan veel informatie opleveren over de individuele leerling. De docent gaat heel gericht te werk: bij de ene leerling geeft hij of zij een specifieke aanwijzing, bij een andere is een bemoediging meer op zijn plaats.

Dubbele doelen nastreven bij het Afspraken maken

V	A	A	
			R
		×	D
			I
			G

Huiswerkopdrachten zijn doorgaans productgericht. In het wiskundeonderwijs begint zich echter de gewoonte te ontwikkelen méér te vragen van de leerlingen. Naast de uitwerkingen en de antwoorden schrijven de leerlingen een soort ‘nabeschouwing’ waarin ze onder woorden brengen *hoe* ze gewerkt hebben. Daarmee verdiepen ze hun inzicht en leren ze principes die ze kunnen gebruiken bij toekomstige leerprocessen.

Ten slotte

In dit artikel zijn alleen de hoofdpunten uit het VAARDIG-model beschreven. Een uitgebreidere beschrijving vindt u in het boekje *Het VAARDIG onderwijsmodel* (Lagerwerf e.a., 1999). Daarin staan ook allerlei voorbeelden voor de toepassing in andere vakken.

Literatuur

Korthagen F. & Lagerwerf B. (1997)
TUSSEN VERZORGEN EN LOSLATEN – VAARDIG omgaan met het geven van verantwoordelijkheid –
in Simons, P.R.J. & Zuylen J.G.G. (red) ‘Als je het de leerlingen laat doen…’ Staalkaartenreeks nummer 2, 11-28, MesoConsult, Tilburg

Lagerwerf, B., Korthagen, F., Melief, K. & Tigchelaar, A. (1999)
Het VAARDIG onderwijsmodel, een praktische wegwijzer voor leraren
Wolters-Noordhoff, Groningen

Alweer geruime tijd staat het onderwerp lineair programmeren op het examenprogramma van de wiskunde-A-leerlingen van het vwo. Ongetwijfeld zullen uw leerlingen vragen naar de praktische waarde van dit onderwerp. Ziehier een interessant voorbeeld, dat helaas aan weinigen bekend is.

Lineair programmeren in de klokkengieterij

Marius Lehr

Inleiding

Al eeuwen lang is voor klokkengieters het stemmen van een klok een lastig probleem. Een klok is namelijk na het gieten zelden zuiver van toon, dat wil zeggen de grondtoon en de boventonen vormen onderling meestal geen harmonische intervallen. Eén van mijn broers, André Lehr, campanoloog te Asten, bedacht een systeem om met behulp van lineair programmeren dit probleem te benaderen. Hij deed dit binnen het computeralgebraprogramma Maple. Nu is Maple voor niet- wiskundigen een moeilijk programma. En omdat klokkengieters, op misschien een enkele uitzondering na, geen wiskundigen zijn, besloot ik een programma te schrijven dat het probleem ook te lijf gaat en tevens voor niet-wiskundigen geschikt is.

Wat is zuiver van toon ?

Om deze vraag te beantwoorden moet je weten dat een klok meerdere boventonen voortbrengt. Door de klokkengieter worden de grondtoon en de boventonen samen partialen genoemd. Er zijn er vele. In het algemeen beperken zij zich tot de laagste vijf partialen. Als deze correct zijn heeft de klok een zuivere toon.
Bij een zuivere c1-klok zijn de partialen: c1, c2, es2, g2 en c3. De klokkengieters noemen ze achtereenvolgens hum note, fundamental, minor third, fifth en nominal. De frequenties van de partialen geeft de gieter aan in Hz. Bij voorkeur geeft hij echter de hoogtes van de tonen aan in cents. Dit is een lineaire schaal, waarbij de lengte van het octaaf gelijk is aan 1200 cents. De afstand tussen bijvoorbeeld de a en de ais is op deze manier 100 cents. Vaak zet de gieter de nominal op 2400 cents, zodat de andere partialen, als de klok zuiver is, respectievelijk een toonhoogte hebben van 0, 1200, 1500 en 1900 cents. Hij is echter geheel vrij in zijn keuze.
Omdat de toonstructuur van een te gieten klok moeilijk is te voorspellen, giet hij de klok iets te dik, ongeveer 1%. De partialen zijn dan te hoog van toon. Wegslijpen, klokkengieters noemen dit uitdraaien (op een draaibank), van brons aan de binnenzijde van de klok werkt vrijwel altijd verlagend op de toonhoogte. Aldus kan hij de klok zuiver krijgen. De lezer begrijpt het probleem: waar moet brons worden weggenomen en hoeveel? Tot op de dag van vandaag is het vooral hun ervaring, die het hun mogelijk maakt dit moeilijke karwei te klaren.

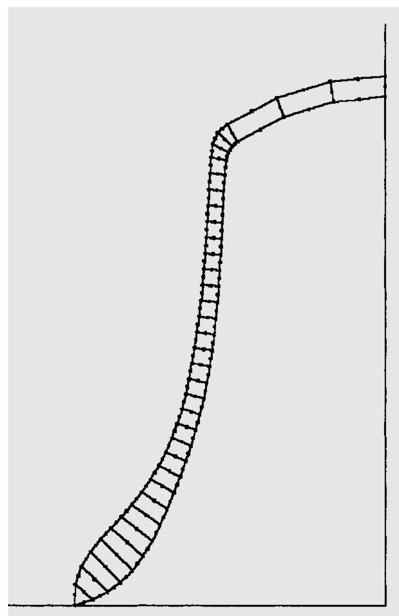
De partialen van een c1-klok

Engelse naam	*Nederlandse naam*	*Toon*	*Centswaarde*
Hum note	Grondtoon	c1	0
Fundamental	Priem	c2	1200
Minor third	Kleine terts	es2	1500
Fifth	Kwint	g2	1900
Nominal	Octaaf	c3	2400

Teveel brons wegslijpen is een kleine ramp; meerdere malen is het gebeurd, dat een klok opnieuw gegoten moest worden.
Nu weten de gieters allang dat de relatie tussen de hoeveelheid weg te slijpen brons en de toonwijziging een lineaire is. Later heeft A.J.G. Schoofs, verbonden aan de Technische Universiteit van Eindhoven, dit met computerberekeningen bevestigd.

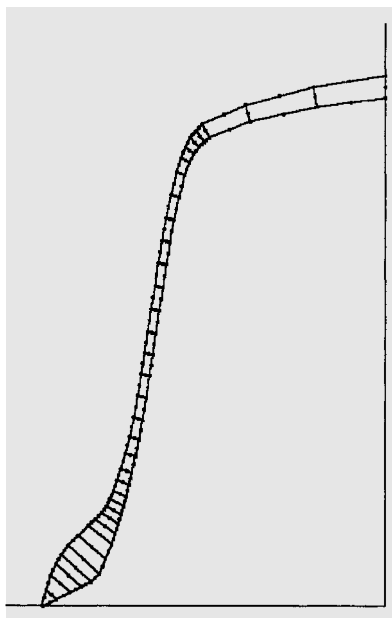
De werkwijze

We verdelen de klok in 36 evenwijdige ringen, zeg maar breedteringen of breedtebanden, door de gieter sectoren genoemd, zie figuur 1.



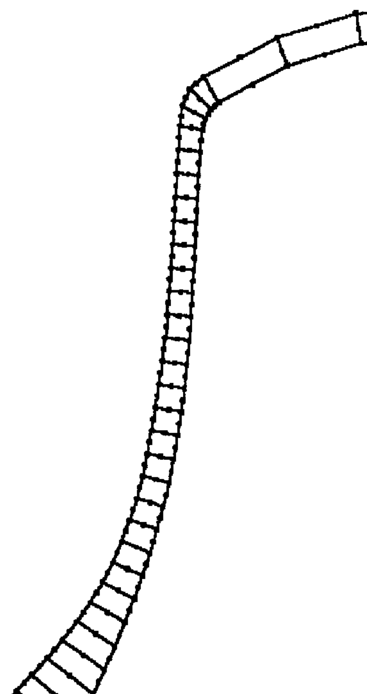
figuur 1

Tot aan de schouder van de klok 33 en daarboven nog eens drie sectoren. De punten op het profiel van de klok zijn de meetpunten, waarvan de beide coördinaten aan de computer worden meegedeeld. De computer kan dan deze waarden inlezen en het profiel tekenen.
In figuur 1 gaat het om de door de computer ontwikkelde standaardklok met een hoogte van 0,93 m, een grootste diameter van 1,15 m. en met toon f1. Dit profiel is een karakteristiek voorbeeld van een West-Europese klok, waarvan er vele in onze torens hangen. In de loop van de jaren hebben sommige klokkengieters de beschikking gekregen over heel wat klokprofie-

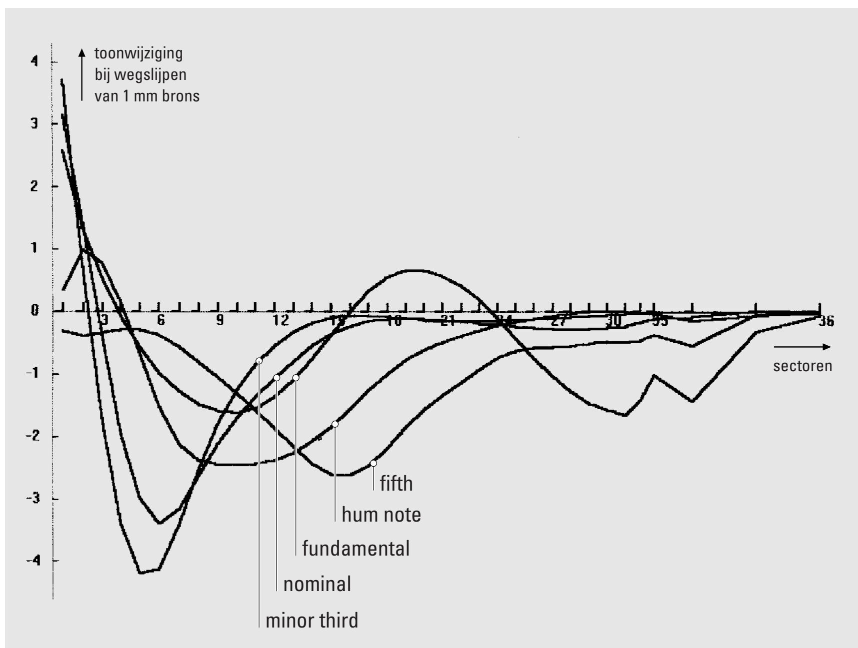


figuur 2

len, die op de harddisk van hun computer worden bewaard. Zo ziet u in figuur 2 het profiel van de 1,85 hoge klok met een diameter van 2,55 m, die enige jaren geleden is gegoten en in de toren van de



kathedraal van Santiago de Compostela in Spanje hangt. Deze klok is een replica van een oude klok, die gescheurd was. Het profiel is duidelijk anders dan het profiel van de standaardklok.
Schoofs heeft in zijn onderzoek een tiental jaren geleden al een numerieke methode ontwikkeld om te bepalen hoeveel cents een partiaal daalt als uit een sector één mm brons wordt weggeslepen. Hierbij gebruikte hij de computer voor zijn berekeningen. Dat was een geweldig winstpunt, niet alleen weten-



figuur 3

schappelijk maar ook praktisch. Er hoefde geen klok meer onbruikbaar gemaakt te worden. Deze waarden, niet helemaal terecht stemgrafieken genoemd, zijn bekend. Let wel: die waarden zijn voor elke sector en voor elke partiaal anders. In figuur 3 ziet u de stemgrafieken van de klok uit figuur 1. Op de horizontale as zijn de sectoren afgezet, op de verticale de toonwijzigingen bij het wegslijpen van één mm. Bij sector 14 ziet u van boven naar beneden, de grafieken van de minor third, de nominal, de fundamental, de hum note en de fifth. Het zal u duidelijk zijn dat één mm wegslijpen in bijvoorbeeld sector 24 een totaal ander effect heeft dan wanneer dit gebeurt in sector 6. De bedoeling is nu om een zodanige combinatie van het wegslijpen van brons in verschillende sectoren te kiezen, dat het gewenste resultaat, dat is de gewenste toondalingen van de partialen, wordt bereikt. Bovendien zal de gieter de hoeveelheid brons die hij wegslijpt willen minimaliseren. Om dit alles te bereiken kan gebruik gemaakt worden van lineair programmeren. Dit kan op twee manieren.

De simplexmethode

Er zijn 36 sectoren. De variabelen zijn de stemsneden: dit zijn de dieptes van de hoeveelheid weg te slijpen brons in elk van de sectoren. Noem deze $d(i)$ met $i = 1, \ldots, 36$. Bij elke partiaal horen 36 waarden van de stemgrafieken. Noem deze $s(i)$ met $i = 1, \ldots, 36$.
Als nu een partiaal $|p|$ cents in toonhoogte moet dalen ($p < 0$) dan geldt: $\Sigma\, s(i) \cdot d(i) = p$.
Om te voorkomen dat de computer het probleem niet aan kan geven we aan p een tolerantie t (een niet-negatieve waarde, meestal kleiner dan 5). De eisen worden dan:
$\Sigma\, s(i) \cdot d(i) > p - t$ en
$\Sigma\, s(i) \cdot d(i) < p + t$.
Zo kom je tot twee beperkende voorwaarden per partiaal. Bovendien zal elke sneediepte groter dan of gelijk aan 0 moeten zijn en heeft de gieter de mogelijkheid om een maximum op te geven aan elke sneediepte. Bij de keuze van dit maximum let hij op de diameter van de klok. Elke sector levert dus twee beperkende voorwaarden en elke partiaal levert er twee. Zo komen we bij 36 sectoren en vijf partialen tot 82 beperkende voorwaarden. De doelfunctie wordt afgeleid uit de wens dat er zo weinig mogelijk brons wordt uitgedraaid. De doelfunctie is dus $\Sigma\, d(i)$. Deze moet geminimaliseerd worden. In de keuze van deze doelfunctie is de gieter uiteraard vrij.

Het zal de lezer duidelijk zijn, dat er veel gerekend moet worden om het probleem op te lossen. Daarom schreef ik een computerprogramma dat het rekenwerk moet doen. In dat programma zijn twee routines opgenomen. De eerste gebruikt de simplexmethode. Bij vijf partialen is de rekentijd op een pentium minder dan één minuut. De simplexroutine vond ik in het boekje Basic Lineair Programming van Brian D. Bunday.
Het gebruik van het programma is heel simpel: de klokkengieter geeft eerst de diameter van de klok op. Dan vermeldt hij de gewenste partiaaldalingen, de toleranties en de maximum dieptes en na één minuut staat op het scherm hoeveel

De stelling van Guldin

De stelling luidt:
De inhoud van het lichaam, dat ontstaat door de wenteling van een vlakstuk om een as, gelegen in het vlak hiervan, terwijl geen vlakpunten aan weerskanten van de as liggen, is het product van de oppervlakte van het vlakstuk en de lengte van de weg, die bij wenteling door zijn zwaartepunt wordt doorlopen. (P. Molenbroek, Leerboek der Stereometrie, P. Noordhoff N.V., Groningen - Djakarta, 12e druk, 1952).
De oppervlakte van het vlakstuk wordt in het programma berekend door dit vlakstuk te verdelen in meerdere driehoeken. De weg van de wenteling is een cirkel, waarvan het middelpunt op de as van de klok ligt en de straal de afstand is van de zwaartepunten van de genoemde driehoeken tot deze as.

Inleiding Matrixrekening en Lineaire Optimalisering

Een uitstekend boekje waarin de simplexmethode wordt behandeld is: W.T. van Horssen en A.H.P. van der Burgh, Inleiding Matrixrekening en Lineaire Optimalisering, Epsilon Uitgaven, Utrecht 1992.
Het lukte de schrijver van dit artikel niet een computerroutine voor de simplexmethode te schrijven. Zoals gezegd vond hij er een in het boek van Brian D. Bunday. De lezer, die over dit probleem aan de auteur van dit artikel meer informatie kan geven, bewijst hem een grote dienst.

brons er in welke sectoren uitgedraaid moet worden. Wel is het zo dat een gek meer kan vragen dan tien wijzen c.q. één computer, kunnen beantwoorden. Dit is het geval als er twee of meer beperkende voorwaarden met elkaar in strijd zijn. In dat geval meldt de computer dat.

Hoekpuntenmethode

Het probleem is echter ook op een tweede manier te benaderen. Klokkengieters hebben de gewoonte om de sneediepten van meerdere naast elkaar liggende sectoren aan elkaar gelijk te laten zijn. De klok gaat er dan aan de binnenkant niet als een wasbord uitzien. Ik maakte van deze werkwijze dankbaar gebruik en kon zodoende het aantal variabelen drastisch verminderen.
Aldus verminderde ik het aantal variabelen tot zes. Bij vijf partialen heb je dan 22 beperkende voorwaarden. Uiteraard moet de doelfunctie dan worden aangepast.
Nu gebruik ik de volgende stelling:

Als de coëfficiëntenvector van de doelfunctie onafhankelijk is van elk der coëfficiëntenvectoren van de beperkende voorwaarden, en dat is in het onderhavige probleem vrijwel altijd het geval, dan wordt het minimum van de doelfunctie bereikt in een snijpunt van n hypervlakken, waarin n het aantal variabelen is en de hypervlakken worden bepaald door in de vergelijkingen van de beperkende voorwaarden het groter of kleiner dan teken te vervangen door een is-gelijk teken.

Aldus geldt dan bij $n = 6$ en 22 beperkende voorwaarden dat er

$$\binom{22}{6} = 74613 \text{ stelsels van lineaire}$$

vergelijkingen met 6 onbekenden moeten worden opgelost. Dat lijkt erg veel, maar moderne pentiums zijn snel; op mijn computer en dat is lang niet meer de snelste, duurt het zeven minuten. Bij de routine waar stelsels vergelijkingen worden opgelost moet je natuurlijk bedenken dat sommige stelsels onoplosbaar zijn en dat alleen de oplossingen die voldoen aan alle beperkende voorwaarden, in aanmerking komen. Het verbaasde mij dat er van de 74613 slechts 151 overblijven. De computer heeft dan snel de oplossing met de laagste waarde van de doelfunctie gevonden. Bovendien laat ik de computer het gewicht van de hoeveelheid uit te draaien brons berekenen met behulp van de stelling van Guldin. Tevens levert de computer een lijst af van alle overige 150 mogelijkheden. Zij voeren alle tot het gewenste resultaat, maar vragen meer brons weg te slijpen dan in de meest gunstige situatie.

Ten slotte

Meer informatie over de toepassing van de wiskunde in de wereld van de klokkengieters vindt u in het boek van André Lehr, *Campanologie* (Koninklijke Beiaardschool 'Jef Denijn', Mechelen, 2de druk 1997). Bijzonder interessant hierin is de toepassing van de groepentheorie op het Engelse wisselluiden. Misschien iets voor een volgend artikel in Euclides.
Een interessante internetsite over dit onderwerp, met veel links naar andere sites, is:
http://www.gironet.nl/home/vandijk1/ index.html.

Het programma

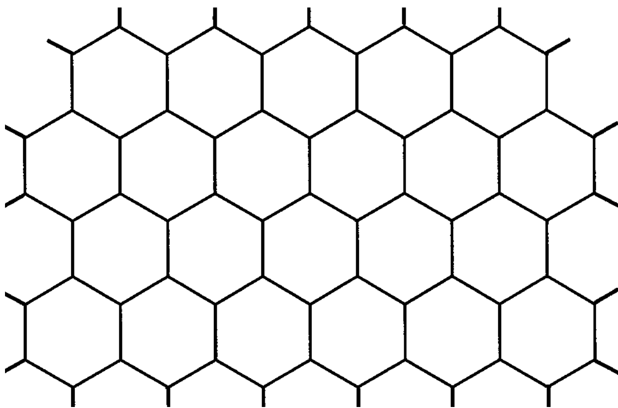
Het in het artikel genoemde computerprogramma is geschreven met behulp van de programmeeromgeving Visual Basic 3. De geïnteresseerde lezer die het computerprogramma wil bekijken, kan dat, uitsluitend via e-mail, in een zipfile, van mij gratis ontvangen. Het programma draait uitsluitend onder Windows. Stuur even een mailtje aan mariuslh@telekabel.nl.
U moet wel met een zipfile kunnen omgaan.

Kun je de aarde gelijkmatig betegelen?

A.K. van der Vegt

Inleiding

Een vloer kun je op verschillende manieren naadloos met tegels bedekken. De eenvoudigste tegelvormen zijn daarbij de driehoek, het vierkant en de zeshoek. We bekijken eerst de vulling met zeshoeken. In ieder hoekpunt komen er drie samen. Afgezien van de randen, lukt dit altijd bij een nog zo grote vloer.



figuur 1: Vlakvullende zeshoeken

Maar als je nu al maar doorgaat, en uiteindelijk de hele aarde met zeshoeken wilt bedekken, waarbij de aarde natuurlijk gedacht wordt als een geheel gladde bol zonder zeeën en bergen. Kom je dan uiteindelijk, bij de juiste keus van de tegelgrootte, tot een glad en goed sluitend geheel?
Het antwoord is: 'neen'.

Als je de geheel regelmatige (Platonische) veelvlakken bekijkt, zie je al gauw, dat daarbij geen zeshoeken voorkomen: het zijn:
- tetraëders met vier driehoeken;
- kubussen met zes vierkanten;
- octaëders met acht driehoeken;
- dodekaëders met twaalf vijfhoeken;
- ikosaëders met twintig driehoeken.

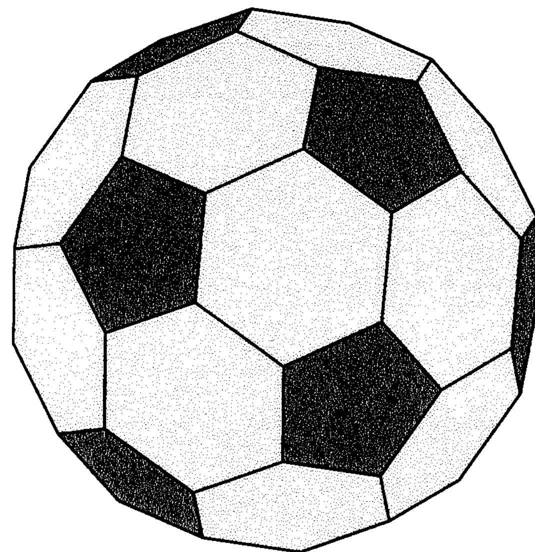
Maar dat betreft regelmatige veelvlakken. Je zou je kunnen voorstellen dat, met wat vervormen en wringen, zeshoeken ook wel een gesloten geheel kunnen vormen. Om dat na te gaan, moeten we de topologie van veelvlakken nader analyseren.

Een veelvlak met zeshoeken?

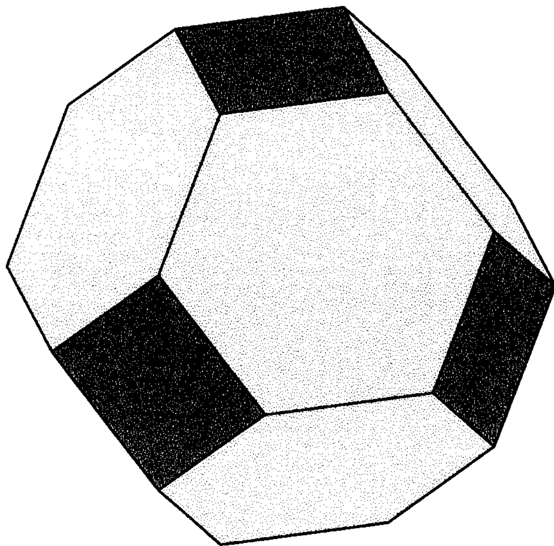
We beginnen met een hypothetisch lichaam, opgebouwd uit Z_6 zeshoeken, die samenkomen in drietallige hoekpunten, waarvan er H_3 zijn. We gaan nu het aantal ribben R tellen. Eerst door uit te gaan van de hoekpunten; we komen dan op $3H_3$. Maar we hebben ze dubbel geteld, dus $3H_3 = 2R$.
Vervolgens tellen we de ribben per vlak, en, ook weer met dubbeltelling, komen we op: $Z_6 = 2R$.
Verder geldt voor alle convexe veelvlakken de stelling van Euler: $H + Z = R + 2$.

Met $Z = \frac{R}{3}$ en $H = \frac{2R}{3}$ wordt die stelling: $R = R + 2$,

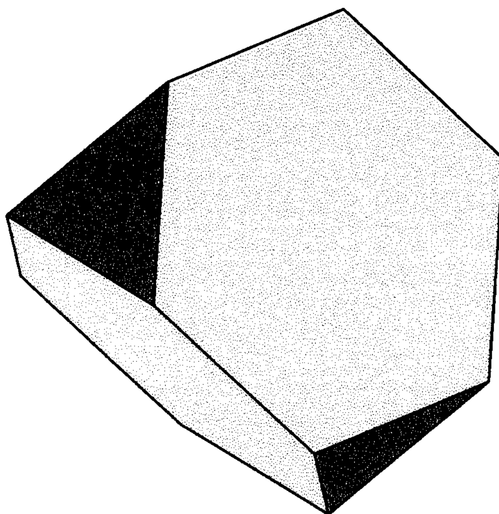
en dat kan natuurlijk niet. We hebben niets aangenomen over regelmaat in hoekpunten of vlakken, alleen maar drietallige hoekpunten. Het blijkt dus dat zeshoeken op geen enkele manier een bol kunnen bedekken.



figuur 2: (5 6 6)



figuur 3: (4 6 6)



figuur 4: (3 6 6)

Er bestaan natuurlijk wel veelvlakken die zeshoeken bevatten, maar dan altijd in combinatie met andere veelhoeken, zoals het halfregelmatige (Archimedische) lichaam, de bekende voetbal of 'Bucky Ball'. Zie figuur 2. Dit lichaam wordt ook wel aangeduid met (5 6 6). Deze notatie betekent: in elk hoekpunt komen een vijfhoek en twee zeshoeken samen. Verder zijn er de (4 6 6), de afgeknotte octaëder, of de (3 6 6), de afgeknotte tetraëder.
De vraag is dus hoe we op de eenvoudigste manier rond de wereld kunnen komen door een aantal andersoortige veelhoeken in het patroon in te voegen.
Daarvoor moeten we onze analyse wat uitbreiden. We beginnen weer met Z_6 zeshoeken, maar voegen nu Z_x x-hoeken toe. De hoekpunten, H_3 in getal, laten we gewoon drietallig. Het aantal ribben is weer R. Op dezelfde manier als boven kunnen we nu de volgende relaties opschrijven:

$$3H_3 = 2R \text{ of } H_3 = \tfrac{2}{3}R$$
$$6Z_6 + xZ_x = 2R \text{ of } Z_6 = \frac{R}{3} - x\frac{Z_x}{6}$$

En volgens de formule van Euler:

$H_3 + Z_6 + Z_x = R + 2$, dus:

$$\tfrac{2}{3}R + \left(\frac{R}{3} - x\frac{Z_x}{6}\right) + Z_x = R + 2 \text{ of:}$$

$$Z_x\left(1 - \frac{x}{6}\right) = 2,\ Z_x = 2/\left(1 - \frac{x}{6}\right)$$

Nu kunnen we invullen.
Willen we vijfhoeken erbij? Dan wordt, met $x = 5$, $Z_5 = 12$. Vierhoeken? Dat geeft: $Z_4 = 6$. Driehoeken? Dan kom je op $Z_3 = 4$. Met andere woorden: om een heel grote bol te bedekken heb je, naast een groot aantal zeshoeken, altijd 12 en niet meer of minder, vijfhoeken nodig. Dat doet denken aan de voetbal; die is samengesteld uit 20 zeshoeken en twaalf vijfhoeken (figuur 2). Het kan ook met zes vierhoeken; het eenvoudigste geval, de (4 6 6) is weergegeven in figuur 3. Maar ook vier driehoeken zijn voldoende, bijvoorbeeld in de (3 6 6) (figuur 4). Combinaties blijken ook te kunnen, bijvoorbeeld zes vijfhoeken en drie vierkanten.
Dit alles geldt als we vasthouden aan drietallige hoekpunten. Je kunt het eindeloos uitbreiden als je ook vier- en vijftallige hoekpunten toelaat, maar dat gaat nu, voorlopig, te ver.

Veelvlakken met driehoeken en vierkanten

Wat nog wél interessant is, is het bekijken van de andere twee manieren om met regelmatige veelhoeken een vlak te vullen, namelijk met vierkanten en met driehoeken. Eerst maar eens de vierkanten.
Kiezen we voor viertallige hoekpunten, dan krijgen we een perfecte vlakvulling, maar dan is het, net als bij zeshoeken, onmogelijk om een bol te bedekken. Ook nu vragen we ons af of een klein aantal andere veelhoeken kan helpen. We hebben dan een aantal vierkanten Z_4, waarvan er per hoekpunt vier samenkomen. Het aantal hoekpunten is dan H_4. Maar we moeten Z_x x-hoeken toevoegen, dus de vergelijkingen worden nu:

$$4H_4 = 2R \text{ of } H_4 = \frac{R}{2},$$

$$4Z_4 + xZ_x = 2R \text{ of } Z_4 = \frac{R}{2} - \frac{Z_x}{4}$$

Wederom volgens Euler: $H_4 + Z_4 + Z_x = R + 2$ resulterend in:

$$Z_x\left(1 - \frac{x}{4}\right) = 2$$

De waarde van x kan niet 4 zijn (dat wisten we al), maar ook niet groter. Blijft over: $x = 3$ met $Z_3 = 8$. Dat geeft een nieuw resultaat: acht driehoeken zijn, als aanvulling op vierkanten, net precies genoeg om de bol geheel te bedekken!
En driehoeken? Die geven toch ook een vlakvullend patroon als je er zes in een hoekpunt laat aansluiten? Met dezelfde behandeling als boven vinden we al gauw dat op die manier de bol niet bedekt kan worden, zelfs niet als je andere veelhoeken toevoegt. Met Z_x x-hoeken kom je namelijk op: $xZ_x = -6$.

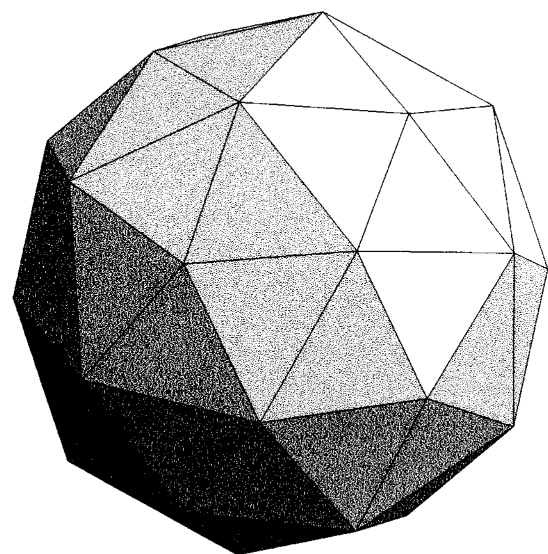
De graad van de hoekpunten variëren

Maar als je toch alleen maar driehoeken wilt gebruiken, moet je ook andersoortige hoekpunten dan zestallige invoeren. Neem bijvoorbeeld H_6 zestallige en H_x x-tallige hoekpunten, dan kom je op:
$6H_6 + xH_x = 2R$
$3Z_3 = 2R$

En vervolgens: $H_6 + H_x + Z_3 = R + 2$
wat resulteert in:

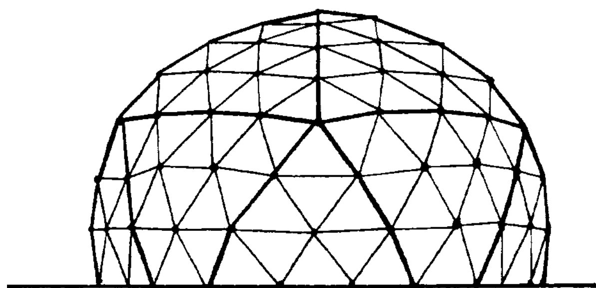
$$H_x = 2/\left(1 - \frac{x}{6}\right)$$

Twaalf vijftallige, of zes viertallige, of ook vier drietallige hoekpunten zijn, naast een groot aantal zestallige, dus voldoende om een gesloten bol te construeren met alleen maar een groot aantal driehoeken.
De vergelijking lijkt sprekend op de uitdrukking die we eerder gezien hebben voor Z_x, het aantal x-hoeken dat we, naast zeshoeken, nodig hebben voor volledige vulling. Geen wonder, want we hebben nu te maken met het duaal verwisselde geval: hoekpunten zijn verwisseld met zijvlakken. Toen we vonden dat er precies 12 vijfhoeken nodig zijn kwamen we terecht bij een lichaam waarin wél alle zijvlakken regelmatig zijn, maar de drietallige hoekpunten niet: een Archimedisch of halfregelmatig veelvlak.
Ter illustratie is het eenvoudigste voorbeeld weergegeven in figuur 5, de ((5 6 6)), waarbij de dubbele haken aangeven dat het een Archimedisch lichaam van de tweede soort betreft, dat wil zeggen een duale verwisseling [1]). De driehoeken zijn hierbij niet meer gelijkzijdig.



figuur 5: ((5 6 6))

Op dit principe zijn de beroemde koepels van de architect Buckminster Fuller gebaseerd. Ze vormen een gesloten geheel van uitsluitend driehoeken. Een voorbeeld is gegeven in figuur 6 [2]).



figuur 6 : Buckminister Fuller koepel

Kortom

Bolbedekkingen vormen een fascinerend probleem, met verrassende oplossingen!

Noten

1 *A.K. van der Vegt* (1991) **Regelmaat in de Ruimte** Delftse Universtaire Pers

2 *A.C. Edmondson* (1992) **A Fuller Explanation** Van Nostrand Reinhold

Software 'perspectief tekenen'

Het was altijd al mijn wens, ruimtefiguren in perspectief te genereren. Welnu, het is er!
Op mijn homepage
home-2.worldonline.nl/~lecluse
staat er weer een programma bij:
perspectief tekenen.
Eenmaal aangeklikt, wordt een bestand PERSPECT.ZIP gedownload.
Nadat u dit hebt uitgepakt, treft u aan:
- perspect.exe het programma
- perspect.doc de handleiding

De werkwijze: u maakt met het programma 3D.exe (ook te downloaden) tekeningen. Los van 3D kunt u het perspectief programma opstarten.
U krijgt alle aanwezige tekeningen voorgeschoteld, waarvan u er telkens een kunt kiezen. Deze wordt dan in perspectief getekend. Hierbij zijn verschillende commando's mogelijk om de tekening te manipuleren. U kunt aldus de figuur aanpassen zodat deze bijvoorbeeld geschikt is voor in een repetitie. Leerlingen kunnen bestuderen, hoe de tekening wijzigt bij verandering van waarnemingspositie. Omdat dit vloeiend verloopt (als een tekenfilm), krijgt met name de leerling met een zwak ruimtelijk inzicht, meer gevoel voor perspectief tekenen.
De resultaten kunnen rechtstreeks geprint worden of (ook in kleur) in uw tekstverwerker worden opgenomen.
Veel plezier ermee!

Ton Lecluse

Gefeliciteerd

Op 1 oktober jongstleden is Fokko Jan Dijksterhuis gepromoveerd op het proefschrift *Lenses And Waves, Christiaan Huygens and the mathematical science of optics in the seventeenth century*.
Een proefschrift dat een buitengewoon boeiend en leesbaar inkijkje geeft in het denken van Huygens.
Voor de liefhebber.
ISBN: 90 3651 288 3

Op 26 april jongstleden is Ed de Moor gepromoveerd op het proefschrift *Van vormleer naar realistische meetkunde*.
Een fenomenaal meesterwerk over de geschiedenis van het meetkundeonderwijs in de afgelopen 200 jaar.
Een boek dat eigenlijk thuishoort op de boekenplank van elke wiskundeleraar.
ISBN 90 73346 40 1
Inlichtingen: 030-2611611

OPROEP

Bij het SLO-project Wiskunde ontstaat er ruimte voor enkele enthousiaste wiskundedocenten (v/m) om, uiteraard tegen vergoeding, te participeren in divers ontwikkelwerk.
Heb je belangstelling of wil je meer weten??
Neem dan contact op met

Jos ter Pelle; tel. 053 - 4840341
of mail: J.terPelle@slo.nl

CWI-Vakantiecursus 1999

Titel: **Onbewezen vermoedens**

Data:

TU Eindhoven:
donderdag 26 augustus, 11.00 - 16.00 uur
vrijdag 27 augustus, 10.00 - 15.00 uur

CWI Amsterdam:
vrijdag 3 september, 15.30 - 20.30 uur
zaterdag 4 september, 10.00 - 15.00 uur

Volgorde van sprekers en (voorlopige) titels:

Eerste dag:
1 J. van de Craats, **De rol van vermoedens in de wiskunde**
2 P. Stevenhagen, **Priemgetallen**
3 R. Tijdeman, **De Riemann-hypothese en het abc-vermoeden**
4 P.W.H. Lemmens, **Het vermoeden van Poincaré**

Tweede dag:
5 J.B.M. Melissen, **Pakkende problemen**
6 G.B.M. van der Geer, **Knopen**
7 **Oefeningen**
8 F. Beukers, **P = NP?**

bespreking

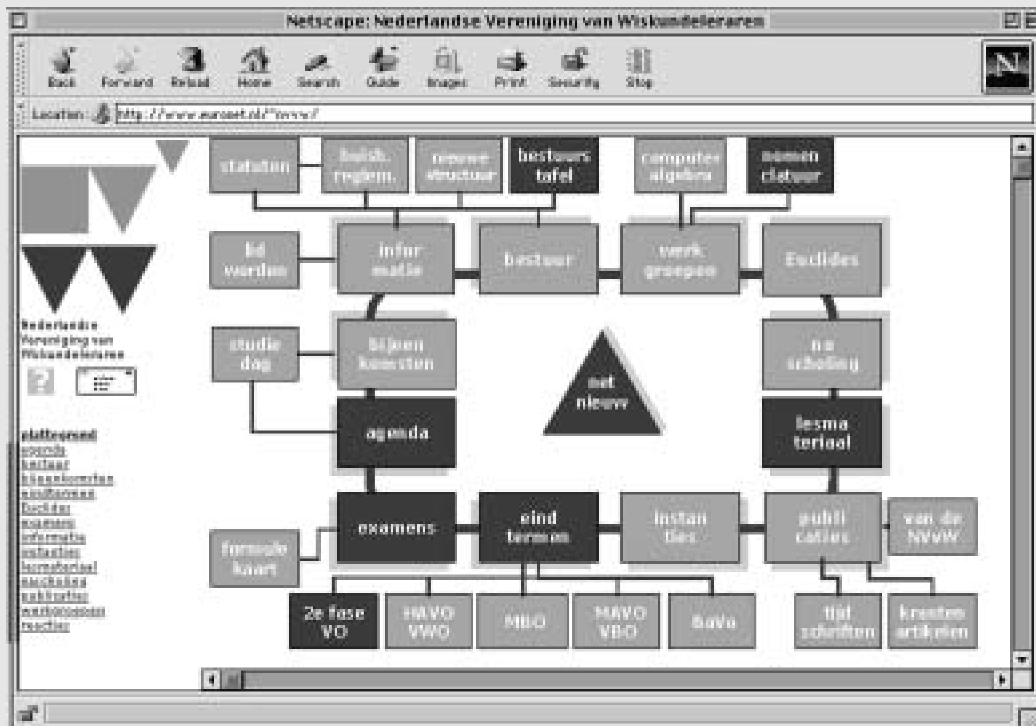
Klaas van Berkel **Citaten uit het boek der natuur**
Opstellen over Nederlandse Wetenschapsgeschiedenis.
Amsterdam, Bert Bakker, 1998
336 pagina's; prijs *ƒ* 49,90 paperback
ISBN 90 351 1973 8

Een van de elf hoofdstukken van Van Berkels nieuwe boek gaat over zeventiende-eeuwse Nederlandse naturaliënkabinetten. Onder de noemer 'Citaten uit het boek der natuur', die tevens de titel voor het hele boek levert, passeren de 'vergaerde seltsaemheden' van verschillende verzamelaars de revue. Van Berkel beschrijft de samenstelling en samenstellers van deze collecties, maar hij laat het niet bij kale beschrijvingen. Meer nog gaat het hem om de vragen erachter. Welke functie hadden de kabinetten, hoe weerspiegelden ze de stand van de wetenschap en hoe werden ze in hun tijd beschouwd?

Net als in de Bijbel is in de Natuur de wil van God te lezen; de objecten in de kabinetten zijn als het ware citaten uit dat boek. Citaten uit het boek der natuur is goed te vergelijken met zo'n zeventiende-eeuws kabinet van naturalia. Na een algemene inleiding over nationale stijlen van wetenschapsbeoefening volgen 'seltsaemheden' uit diverse wetenschappen elkaar op, in vijf hoofdstukken over de gouden eeuw en vijf over de 'tweede gouden eeuw', de decennia na 1870, waarin Nederland opnieuw een bloeiperiode met verschillende toonaangevende natuurwetenschappers doormaakte. De meeste aandacht gaat, zeker in de tweede periode, naar de onderzoekers van de levende natuur.
Af en toe toont het kabinet een wiskundig staaltje. In een breed opgezet hoofdstuk over 'geleerdheid, vernuft en wetenschap in de gouden eeuw' verschijnen typen als Mulerius en Golius, die respectievelijk in Groningen en Leiden zowel oude talen als wiskunde onderwezen, Stevin die als 'vernufteling' met onderwijs en adviezen Stadhouder en Staten diende, Van Ceulen, Van Merwen en Van Schooten Sr., de pioniers aan de Leidse ingenieursschool, Plancius die met andere astronomen en cartografen de theorie leverde waarmee zeevaarders naar de Oost konden, en Van Schooten Jr. die samen met zijn leerlingen de door Descartes in 1637 geïntroduceerde koppeling van algebra en meetkunde verder uitwerkte.
Sommige onderwerpen komen verspreid door het kabinet voor. Dat heb je wel eens, dan loont het niet de moeite om er een apart laatje voor te maken dus je verdeelt het materiaal over de laden. Het probleem van de lengtebepaling op zee, dat veel onderzoekers stimuleerde, onder wie Christiaan Huygens, is een mooi voorbeeld. Het komt op bijna identieke wijze voor in het eerder genoemde hoofdstuk over 'geleerdheid Idots', in de originele studie over Hortensius (van 1634 tot 1639 wiskundige aan het Athenaeum Illustre te Amsterdam, 'een van die kleine geleerden in de Republiek die het niet hebben gemaakt' en die verwikkeld was in de beoordeling door de Staten Generaal van een nieuwe methode van lengtebepaling door Galileï) en in het hoofdstuk over 'de Verenigde Oost Indische Compagnie en het Indische natuuronderzoek', want voor de VOC was een correcte lengtebepaling de manier om op de terugweg de specerijen droog te houden.
De eerste indruk is die van verbrokkeldheid. Enige distantie leidt evenwel tot de gedachte dat dit meervoudig voorkomen alleen maar bevestigt dat de lengtebepaling in de 17e eeuw een centraal probleem was. De verzamelaar kiest en laat ons via een aantal objecten zijn of haar beeld van de natuur zien. Van Berkels kabinet had wat mij betreft best wat wiskundiger mogen uitvallen. Het nagenoeg ontbreken van wiskunde in de tweede gouden eeuw is echt vreemd, namen als Bierens de Haan, Korteweg en Brouwer hadden hier niet misstaan. Mochten er nog een paar lege laatjes over zijn voor toekomstige vulling, dan is mijn aanbeveling duidelijk. De volle laatjes overziend, en bedenkend hoe daar af en toe wiskundige facetten blinken en veel ander moois, geef ik graag toe dat ik het een fraai kabinet vind.

Jan van Maanen

http://www.euronet.nl/~nvvw



De vereniging nu ook op internet

Hebt u de site een keer gezien …

dan komt u zeker terug!

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Van de bestuurstafel

De NVvW op weg naar 2000!
Het jaar 2000 is een bijzonder jaar voor onze vereniging. In dat jaar vieren we behalve het millennium namelijk ook ons 75-jarig bestaan. Nu al zijn diverse leden achter de schermen druk in touw om daar iets moois van te maken.

Om te beginnen zal er een Lustrumboek uitgebracht worden. Dit boek, waarvan de titel nog niet bekend is, maar de kopij al grotendeels geschreven, beoogt een beeld te geven van het wiskundeonderwijs in de twintigste eeuw. Toegegeven, nogal een ambitieus project, maar de vele auteurs die er aan meewerken zijn dan ook niet de minsten. Het bestuur wenst de eindredactie, die bestaat uit Martinus van Hoorn, Fred Goffree en Bert Zwaneveld, veel succes bij de verdere afwerking. Het boek wordt uitgegeven door Wolters-Noordhoff.

Ter gelegenheid van het lustrum wordt de jaarlijkse studiedag uitgebouwd tot een 24-uurs evenement, en wel op vrijdag 17 en zaterdag 18 november.
Naar alle waarschijnlijkheid wordt dit lustrumcongres gehouden op de Universiteit van Utrecht. De feestcommissie moet nog geïnstalleerd worden. Heeft u ideeën voor de inhoud of belangstelling om mee te werken, laat het ons horen svp.

Een derde component van het lustrum is vooralsnog niet meer dan een tamelijk wild idee waarvoor al wel allerlei instanties enthousiast gemaakt zijn. Het idee is om op een dag in het jaar 2000 een activiteit te organiseren waar zoveel mogelijk scholen en leerlingen aan mee kunnen doen.
Om dit plan ten uitvoer te brengen, is er contact met de Stichting WeTen, o.a. bekend van de Wetenschaps- en Techniek week.

Tenslotte wordt er nog gewerkt aan een kadootje voor alle scholen. Alhoewel al bekend is wat dat zal worden, verklappen we dat hier nog even niet.

Via de bestuurstafel houden we u op de hoogte van de plannen.

Het reizend circus
We kunnen weer terugkijken op geslaagde regionale bijeenkomsten. In totaal hebben ruim 300 mensen de bijeenkomsten bezocht en naar onze indruk het gebodene ook gewaardeerd. De plenaire lezing over het gebruik van Internet in de wiskundeles was heel informatief. We prijzen ons gelukkig dat er elk jaar mensen bereid zijn om belangeloos voor de vereniging een werkgroep te leiden of een lezing te verzorgen. Zonder de inzet van de leden is er geen vereniging.
Zoals altijd staan we open voor suggesties uwerzijds voor mogelijke onderwerpen voor werkgroepen het komend jaar. We proberen steeds zo actueel en informatief mogelijk te zijn.

Zebra
Op de regionale bijeenkomsten mocht onze eersteling zich in een grote belangstelling verheugen. Maar: deze eerste zebra staat nog maar net op z’n wankele beentjes of de tweede komt er al weer aan. Het tweede deeltje gaat over perspectief en is daarmee wat meer B-achtig dan het eerste, over statistiek en kattenaids.

OSB
Hoewel loopbaanoriëntatie in havo/vwo sinds kort weer uit de vakken is gehaald en in het vrije deel geplaatst, blijft het een belangrijk onderwerp voor alle leerlingen. Het is goed als leerlingen zicht krijgen op de mogelijkheden van wiskunde na en buiten de school. We zijn in overleg met het Landelijk Coordinatiepunt Vakdocentendagen om te bezien of zij iets kunnen aanbieden wat voor ons wiskundedocenten interessant is.

Het tekort aan studenten en leraren in de exacte vakken
De NVvW is al jaren aangesloten bij de bètafederatie. Dit is een federatie van 15 Nederlandse natuurwetenschappelijke verenigingen, met in totaal zo’n 100.000 leden: ingenieurs, chemici, farmaceuten, fysici, astronomen etc. De federatie fungeert als een overlegorgaan, waarbij men gezamenlijk optreedt als er een gezamenlijk belang is. Het tekort aan studenten en leraren in de exacte vakken is zo’n belang. Vandaar dat men hierover een gesprek met de minister heeft aangevraagd.

Half mei is er een hoorzitting in de Tweede Kamer over de nota ‘Maatwerk voor morgen’, ook over het lerarentekort en hoe dat te bestrijden. Het platform VVVO is hiervoor uitgenodigd, en ik zal daar namens het platform aanwezig zijn. Ons inziens wordt de aantrekkelijkheid van het beroep vergroot door verbetering van de arbeidsomstandigheden en verlaging van de werkdruk, eerder dan door enige procenten salarisverhoging. Wat betreft de mogelijkheid van zijinstromers vinden we het van belang dat expliciet vastgesteld wordt aan welke vakbekwaamheidseisen dezen moeten voldoen, dat is in de nota wat vaag gelaten.

Marian Kollenveld

Notulen jaarvergadering 1998

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 14 november 1998, gehouden in het gebouw van Het Nieuwe Lyceum te Bilthoven.

Reeds voor de aanvang van de vergadering hebben vele collega's elkaar gesproken. Het is een dag van ontmoeting en uitwisseling van ervaringen. Dat mag het ook zijn in een tijd van vele veranderingen en vernieuwingen.
De stands op de markt kunnen nauwelijks de toeloop verwerken; de markt voorziet elk jaar weer in een behoefte. Het kost het bestuur dan ook enige moeite om de mensen op tijd de vergaderzaal in te krijgen.

Even na tien uur kan Hans van Lint voor de laatste keer als voorzitter de vergadering openen. Hij verwelkomt een aantal ereleden. Bijzonder was de aanwezigheid van Joop van Dormolen, die ons elk jaar van grote afstand een goede vergadering toewenst maar dit keer acte de presence kon geven.
Na een woord van welkom aan ons allen sprak Hans zijn laatste jaarrede uit. Een jaarrede waarin je de dynamiek van onze wereld gemakkelijk herkende. De bestuursstructuur heeft een wijziging ondergaan, waarmee we beogen een nog betere dienstverlening te kunnen realiseren.
De door het bestuur gehouden enquête heeft een grote respons opgeleverd. De vele reacties van de leden stellen het bestuur in staat geschikte mensen te vragen voor werkgroepen en andere werkzaamheden.
Een andere topic is de aankondiging van de uitgave van de eerste van de zebraboekjes, de Jan Breeman-serie. De jaarrede kunt u vinden in Euclides 74-5, op bladzijde 166 en verder.
Hierna worden de notulen van de algemene vergadering van 1997 aan de orde gesteld. De vergadering heeft geen vragen en keurt de notulen goed onder dank aan de secretaris.
Het jaarverslag behoeft geen verduidelijking en vindt instemming.
De penningmeester geeft nog een korte toelichting op het financieel beheer. Voor niemand geeft het beheer aanleiding tot het stellen van vragen. Het werk van de penningmeester is gecontroleerd door de kascommissie. Het verslag is positief en de voorzitter vraagt de vergadering de penningmeester te déchargeren. De vergadering gaat akkoord.
De voorzitter bedankt de kascommissie, in het bijzonder mw. J.P. Warners, en stelt voor om in de volgende kascommissie te benoemen: dhr. H.G.M. Gerats en dhr. W. van den Berg. Niemand heeft bezwaar.

Bestuursverkiezing
Agneta Aukema -Schepel is aftredend en herkiesbaar. De vergadering heeft er geen bezwaar tegen dat Agneta haar werk binnen het bestuur voortzet.
Ruud Jongeling kan drukke werkzaamheden op school niet meer combineren met het bestuurswerk. De voorzitter bedankt hem voor zijn inzet, zijn opkomen voor het belang van de leerling met name binnen het ivbo/vso en noemt hem inventief en nauwkeurig.
Freek Mahieu, bijna niet meer weg te denken binnen het bestuur, neemt na 24 jaar afscheid. Voorvechter voor het mavo, geen onbekende bij Cito en Cevo; met grote werklust organiseerde hij elk jaar de jaarvergadering, vertegenwoordigde het bestuur in de redactie van Euclides. De voorzitter zegt hem voor dit alles veel dank hetgeen onderstreept wordt door applaus van de aanwezigen.
Daarna komt het moment dat Hans van Lint de voorzittershamer overdraagt aan Marian Kollenveld.
Marian leidt kort haar voorzitterschap in met de wens om de dienstverlening zoals die onder voorzitterschap van Hans vorm mocht krijgen voort te zetten en tevens gebruik te maken van haar eigen deskundigheid om nieuwe impulsen er aan toe te voegen.
Marian richt zich vervolgens tot scheidend voorzitter Hans van Lint. Zij wijst op zijn grote verdiensten met betrekking tot de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs, zijn niet aflatende inzet en vooral zijn grote betrokkenheid bij het belang van de leerling.
Hans wordt even op tactische wijze de zaal uitgelokt. Marian legt aan de vergadering het voorstel van het bestuur voor om Hans te benoemen tot erelid van de vereniging. De vergadering geeft zijn goedkeuring door een warm applaus.
Hans spreekt na de bekendmaking nog een kort dankwoord voor deze bijzonder fijne verrassing. Hij is er mee ingenomen en zegt de bestuursleden dank voor de medewerking in al die jaren.
Met applaus worden de nieuwe bestuursleden Marianne Lambriex-van der Heijden en Jacob Hop begroet.
Een bijzonder moment breekt aan als Heleen Verhage en Gerard Koolstra de nieuwe website aankondigen. Op deze manier kunnen de leden alle veranderingen goed bijhouden. Gerard Koolstra en Dick Klingens zullen ons zoveel mogelijk van actuele informatie voorzien. Gerard en Dick zijn onze websiteredacteuren en worden door Heleen verrijkt met een cadeau voor hun verdiensten. Ook mogen we niet onvermeld laten het werk van Martin van Reeuwijk.
Joke Daemen krijgt vervolgens gelegenheid om de studiedag in te leiden. De studiedag heeft als thema: 'Op zoek naar wiskunde'.
Het huishoudelijk gedeelte van de vergadering wordt voortgezet om 15.45 uur.
Er wordt door niemand meer gebruik gemaakt van de gelegenheid om bij de rondvraag iets naar voren te brengen. Ook zijn er geen schriftelijke vragen binnengekomen.
Marian Kollenveld kan de vergadering sluiten nadat ze de organisatoren van de studiedag heeft bedankt. De voorbereiding heeft veel tijd gekost, maar in het algemeen mochten we een sfeer van tevredenheid proeven onder de aanwezigen.
Het Nieuwe Lyceum heeft ons weer gastvrij ontvangen.

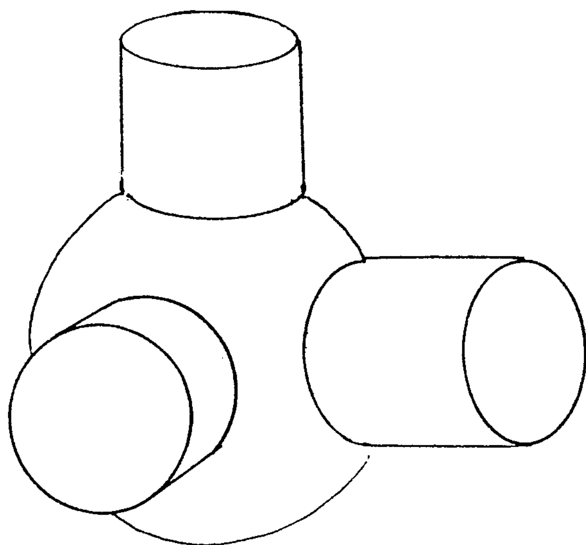
W. Kuipers

De ruitentwaalf-sfeer

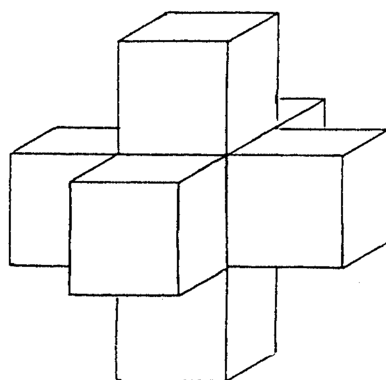
Leon van den Broek

Met een appelboor maak je een cilindrische snede in een appel. (Niet helemaal door de appel heen steken, want dan gaat de cilinder loszitten.) Dat doen we in drie onderling loodrechte richtingen, steeds door het midden van de appel. Anders dan normaal, gooien we weg wat buiten de appelboor is. Wat voor lichaam houd je dan uit het midden van de appel over? Het is beslist groter dan de bol die in de drie cilinders past. Duidelijk is ook dat het lichaam drie cirkels als aanzichten heeft.

Vervolgens ligt het voor de hand de balken te vervangen door cilinders. Daar gaat het in dit artikel om: de doorsnede van drie onderling loodrechte cilinders. Om die goed te kunnen begrijpen, snijden we eerst twee cilinders.



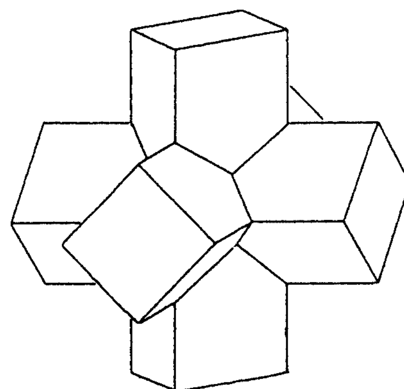
figuur 1

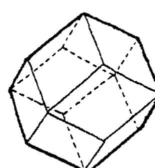


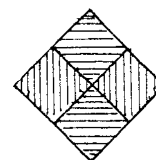
figuur 2

Drie balken

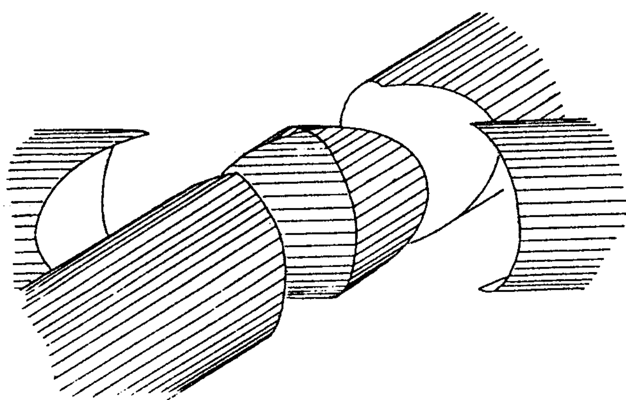
Drie balken met even grote vierkante doorsnede snijden elkaar loodrecht, zoals in figuur 2 is getekend. De assen van de balken gaan door één punt. Hun doorsnede (het gemeenschappelijke deel van de drie balken) is natuurlijk een kubus. Nu draaien we de balken éénachtste slag om hun eigen as; zie figuur 3. Wat is dan hun doorsnede? Dat is meteen veel moeilijker. De doorsnede blijkt het ruitentwaalfvlak te zijn. Zie bijvoorbeeld [1] voor een uitgebreide behandeling van het ruitentwaalfvlak.
Het ruitentwaalfvlak heeft drie vierkanten als aanzichten, elk verdeeld in vier vierkanten.







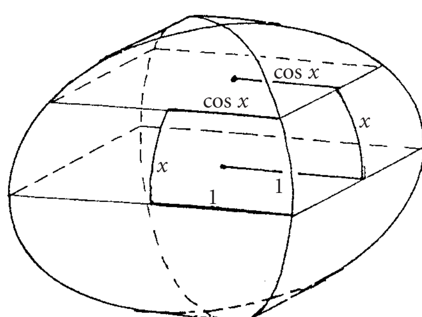
figuur 3

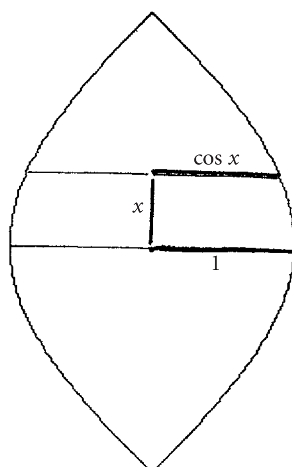


figuur 4

Twee cilinders

Twee cilinders met dezelfde straal doorsnijden elkaar loodrecht met de assen door één punt. Hun doorsnede is een bekend lichaam met een afstand x, gemeten over het gebogen oppervlak. Dan is de halve zijde van de vierkante doorsnede: cos x. Het plat gevouwen oppervlaktesegment (figuur 5) wordt dus ingesloten door twee sinusoïden.





figuur 5

onbekende naam. In [2] wordt het ‘kussentje’ genoemd. Een moderne trekkerstent heeft wel de vorm van de bovenste helft van het kussentje. Het kussentje heeft twee cirkels en één vierkant als aanzichten. Het oppervlak van het kussentje bestaat uit vier congruente segmenten: gebogen stukken van de cilindermantel (figuur 5). De straal van de cilinders nemen we als eenheid. We tekenen de evenaar van het kussentje (dat is de horizontale doorsnede op halve hoogte) en evenwijdig daaraan een vierkante doorsnede op

Drie cilinders

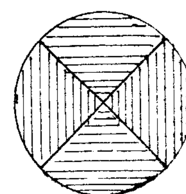
Nu komt er nog een derde cilinder bij, met dezelfde straal als de eerste twee, zo dat de assen van de drie cilinders elkaar loodrecht snijden. Het kussentje had twee hoekpunten (boven en onder). Er komen nu vier soortgelijke hoekpunten bij (voor, achter, rechts en links). Deze zes hoekpunten zijn in figuur 6 aangegeven met open stippen. Door de derde cilinder ontstaan ook acht hoekpunten van een nieuw soort. Die zijn aangegeven met dichte stippen.

De doorsnede van de drie cilinders is maar moeilijk voorstelbaar. Het oppervlak blijkt te bestaan uit twaalf congruente gebogen ‘ruiten’. Een van de ruiten is in figuur 6 gearceerd.

Een ruit is een stuk van een cilindermantel, begrensd door vier gelijke bogen. De kortere diagonaal is een lijnstuk (tussen twee dichte stippen), de langere diagonaal is een cirkelboog (tussen twee open stippen). Twee hoeken van de ruit zijn recht; de andere twee hebben een cosinus van $-\frac{1}{3}$; zie hiervoor de volgende paragraaf.

In de zes hoekpunten met open stippen komen vier ruiten met hun rechte hoeken samen: zij sluiten glad op elkaar aan. De andere acht hoeken zijn wel ‘spits’: de ruimtehoeken zijn π sterradialen groot, dat wil zeggen: een kwart van een volle ruimtehoek; zie de volgende paragraaf.

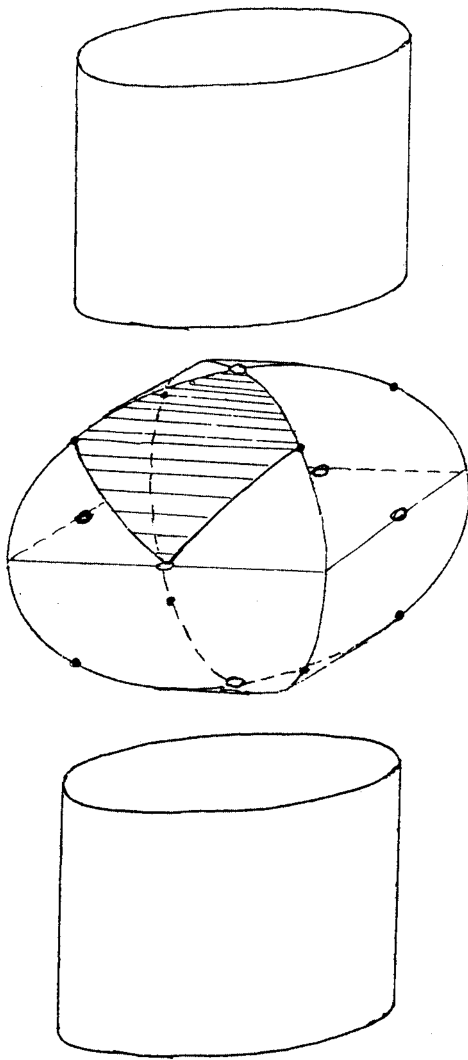
Je kunt het lichaam zien als een opgeblazen ruitentwaalfvlak. Ik noem het een *ruitentwaalfsfeer*. De ruitentwaalfsfeer heeft drie cirkels als aanzichten, elk verdeeld in vier kwarten. Zie figuur 7.



figuur 7

De ruitentwaalfsfeer berekend

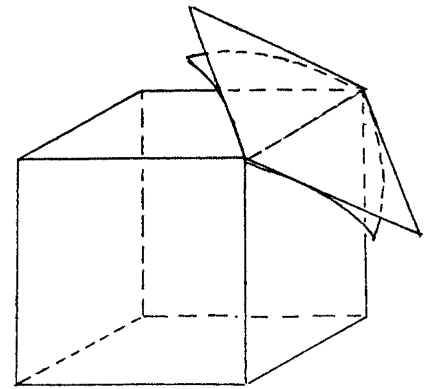
De vier lichaamsdiagonalen van een kubus verdelen hem in zes regelmatige piramiden waarvan de hoogte de helft is van de ribbe van de kubus. In figuur 8 zijn de bovenste en rechter piramide in hun grondvlak gespiegeld. Door de andere vier piramiden ook in hun



figuur 6

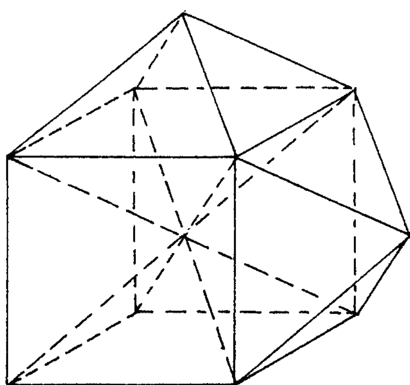
grondvlak te spiegelen, ontstaat het ruitentwaalfvlak. Omdat om een punt acht kubussen passen, is de ruimtehoek van een kubus $\frac{1}{8}$-ste deel van een volle ruimtehoek, dat is $\frac{1}{8} \cdot 4\pi = \frac{1}{2}\pi$ sterradialen.

Als we op de zojuist beschreven manier van de kubus een ruitentwaalfvlak maken, wordt de ruimtehoek twee keer zo groot. Het ruitentwaalfvlak heeft dus ruimtehoeken van π sterradialen (in de punten waar drie ruiten elkaar ontmoeten).

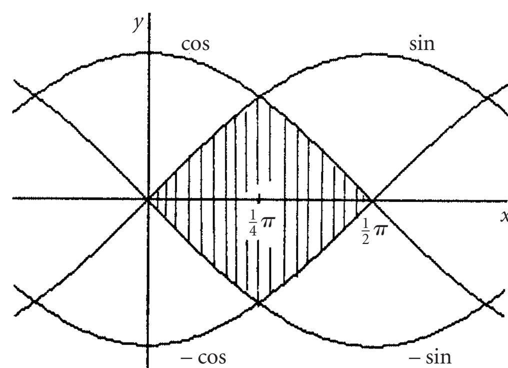


figuur 9

De ruitentwaalfsfeer kun je ook op een dergelijke manier om een kubus heen bouwen. Plaats op alle zes de grensvlakken van de kubus een ‘kruisgewelf’ van hoogte $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ keer de ribbe van de kubus. De ruitentwaalfsfeer en het ruitentwaalfvlak raken elkaar volgens de ribben van de kubus; zie figuur 9. Daarom zijn de ruimtehoeken bij de spitse punten van de ruitentwaalfsfeer gelijk aan de overeenkomstige ruimtehoeken van het ruitentwaalfvlak: π sterradialen.
In het vervolg nemen we voor de straal van de cilinders waaruit we de ruitentwaalfsfeer maakten: 1.
De ruiten die de ruitentwaalfsfeer begrenzen, worden ingesloten door de grafieken van sin, -sin, cos en -cos; zie figuur 10. De grafieken van sin en -sin snijden elkaar in (0, 0)



figuur 8



figuur 10

loodrecht en in $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ onder een hoek waarvan de cosinus $-\frac{1}{3}$ is. De diagonalen van de ruiten zijn en $\sqrt{2}$ en $\frac{1}{2}\pi$ lang.

De oppervlakte van een ruit is

$$4 \cdot \int_0^{1/4\pi} \sin x \; dx = 4 \cdot (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})$$

Hieruit volgt de oppervlakte van de ruitentwaalfsfeer: $48 - 24\sqrt{2}$.

De ruitentwaalfsfeer heeft een ingeschreven bol met straal 1 en een omgeschreven bol met straal $\sqrt{1\frac{1}{2}}$. Om dit laatste in te zien is het handig de constructie van de ruitentwaalfsfeer in een rechthoekig assenstelsel uit te voeren. We snijden de cilinders $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ en $y^2 + z^2 = 1$. De acht spitse hoekpunten zijn dan $(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}})$.

De inhoud van de ruitentwaalfsfeer is gelijk aan de inhoud van de kubus met ribbe $\sqrt{2}$ plus zes kruisgewelven van hoogte $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Van de kruisgewelven kun je de inhoud berekenen met integreren (het principe van Cavalieri); in [2] is dat gebeurd voor het kussentje. Deze techniek levert voor de ruitentwaalfsfeer als inhoud:

$$(\sqrt{2})^3 + 6 \cdot \int_{1/2\sqrt{2}}^{1} 4(1 - x^2)dx =$$

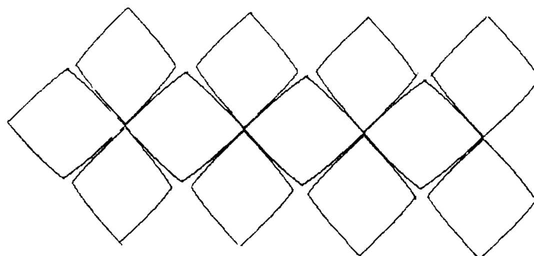
$$16 - 8\sqrt{2}$$

De inhoud kan ook gehaald worden uit de oppervlakte en wel als volgt: een ruitentwaalfsfeer die gemaakt is uit cilinders met straal *r* heeft oppervlakte $(48 - 24\sqrt{2})r^2$. Laten we *r* lopen van 0 tot 1, dan bouwen de schillen daarvan de ruitentwaalfsfeer uit cilinders met straal 1. De inhoud vind je dus door de oppervlakte te integreren:

$$\int_0^1 (48 - 24\sqrt{2})r^2 \, dr = 16 - 8\sqrt{2}$$

Zelf bouwen

In figuur 11 is het netwerk van de ruitentwaalfsfeer getekend. Een ruit wordt ingesloten door de grafieken van $y = \sin x$, $y = -\sin x$, $y = \cos x$ en $y = -\cos x$, zie figuur 10.
Maak twaalf ruiten en knip ze uit. Je kunt de plakrandjes consequent aan twee tegenoverstaande zijden nemen; dan kun je je bij het plakken niet vergissen. Alleen de laatste twee ruiten die je plakt, kun je beter anders maken. Geef de laatste ruit, waarmee je het lichaam dus sluit, maar één plakrand. Het gat waarop hij geplakt wordt, moet dan dus drie plakranden hebben.
De plakrandjes moeten gekarteld worden om de ruiten buigbaar te maken. De vorm van de ruitentwaalfsfeer ontstaat al plakkend vanzelf.



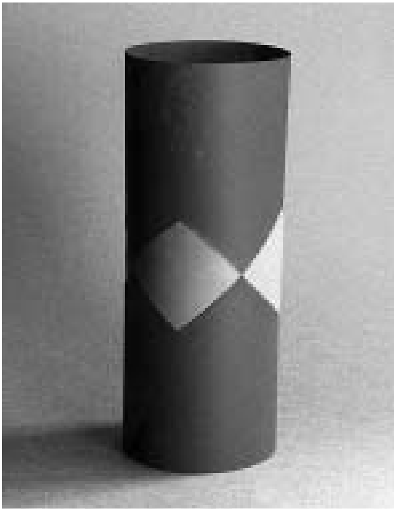
figuur 11

Gebruik gewoon 80-grams papier en bisonkit. De ruitentwaalfsfeer wordt extra mooi als je hem uitvoert in drie kleuren; de ruiten die op dezelfde cilinder liggen geef je dezelfde kleur.
Nog mooier en steviger wordt de ruitentwaalfsfeer als je hem om een tempex bol heen bouwt. Dat is ook handig, want je lijmt de ruiten dan gewoon met de lange diagonaal op de bol. Niet met een agressieve lijm als bisonkit (want die vreet het tempex weg).

Literatuur

1 *Ir. Y.C.G. Nottrot* (1977) **Het ruitentwaalfvlak, koningin der veelvlakken** Euclides 53-3

2 **Pythagoras festival** (1970) p. 206 e.v. Wolters-Noordhoff bv, Groningen









Lesidee: zomaar een eigenschap van een tetraëder

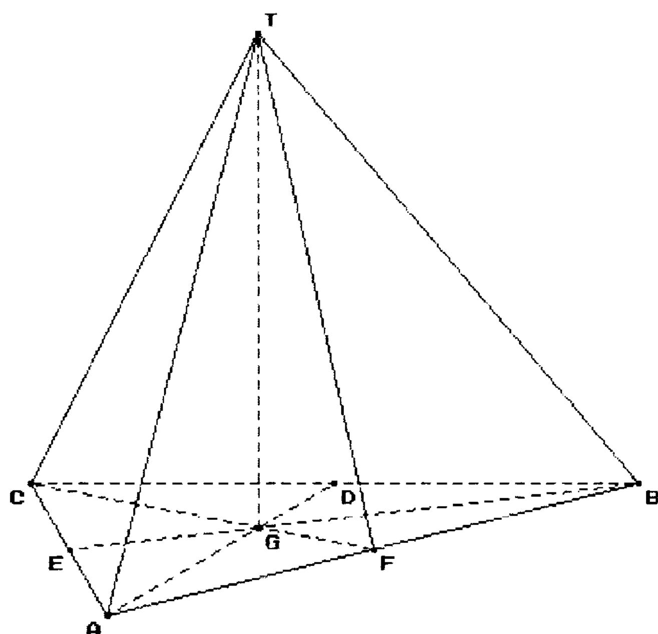
Ton Lecluse

Inleiding

De slotlezing van Lambrecht Spijkerboer op de jaarvergadering van de Vereniging ging onder andere over onderzoeksopdrachten met tetraëders. In de klas heb ik dat aangegrepen om wat met tetraëders te gaan stoeien in mijn lessen. Hierbij probeerde ik mede in te spelen op de stof in het boek zelf (Moderne Wiskunde 6e editie, 5 HAVO en 5 VWO).

Ribben in een tetraëder

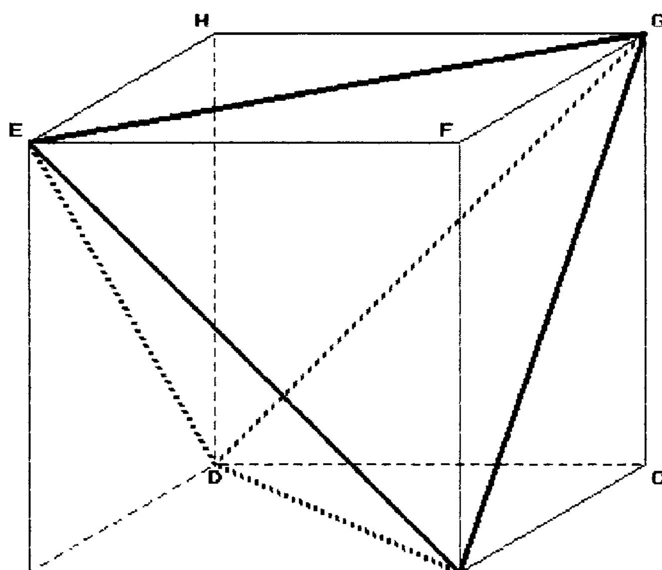
Zo formuleerde ik bijvoorbeeld het klassieke probleem



Gegeven is de tetraëder *T.ABC*
Bewijs dat elk tweetal elkaar kruisende ribben loodrecht op elkaar staan.

In de klas werd dit standaardprobleem veelal als volgt traditioneel opgelost:
Zonder de algemeenheid te schaden kunnen ons beperken tot de ribben *CT* en *AB*.
Stel *F* is het midden van *AB*. Omdat ΔABT gelijkzijdig is, geldt: $TF \perp AB$.
Omdat ΔABC gelijkzijdig is, geldt: $CF \perp AB$
Dus geldt: vlak $CFT \perp AB$.
Dus elke lijn in dit vlak staat loodrecht op *AB*, dus ook $CT \perp AB$.
q.e.d.

Hierboven staat niets bijzonders. Het wordt al wat leuker wanneer je het anders vertelt. Leg leerlingen eerst uit wat het middelloodvlak is van een lijnstuk (prik met een breinaald door een stuk karton). Door goed naar symmetrie bij een tetraëder te kijken, kun je bijvoorbeeld inzien dat in bovenstaande figuur vlak *CFT* het middelloodvlak is van lijnstuk *AB*. Hieruit volgt dan weer: $CT \perp AB$.

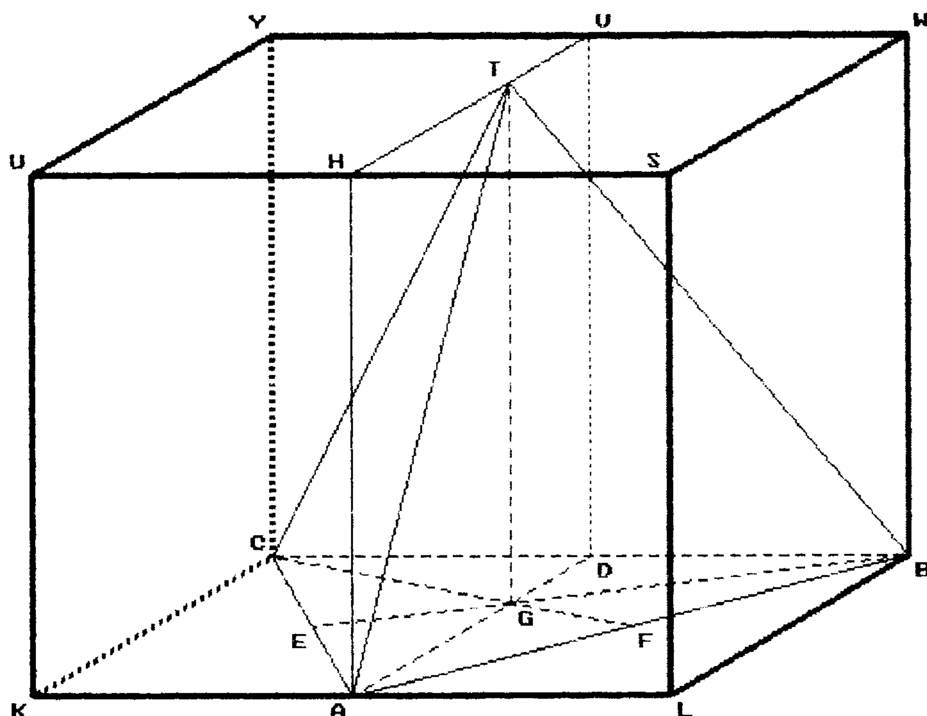


Tetraëder in een kubus

In de klas kwamen we een tetraëder tegen binnen een kubus.
Beschouw de tetraëder *D.EBG*. In deze figuur is bovenstaand probleem veel sneller in te zien, immers $ED \perp AH$ (diagonalen vierkant) en $AH // BG$, dus $ED \perp BG$.
Door de tetraëder in de kubus te leggen krijg je een in mijn ogen verrassend eenvoudig bewijs van de vooraan beschreven bewering.

Kleinste doosje

In de les kwamen ook nog enkele nevenproducten te voorschijn, klaar voor nader onderzoek (wellicht geschikt voor 2[e] fase). Bijvoorbeeld uit de eerste tekening, de tetraëder met horizontaal grondvlak:
Hoe groot is het kleinste doosje (in de vorm van een balk) waarin de tetraëder past?



De figuur suggereert dat dit een doosje is, waarbij ΔABC zich in het grondvlak van de balk bevindt.
Stel $AB = 6$, dan is $AD = 3\sqrt{3}$ en $TG = 2\sqrt{6}$, dus is de inhoud van het omhullende doosje gelijk aan $108\sqrt{2}$.

Bij de tweede tekening echter (de kubus met hierin de tetraëder) is (indien tetraëder weer ribben 6 heeft) de ribbe van de omhullende kubus gelijk aan $3\sqrt{2}$, dus de inhoud van de kubus is $(3\sqrt{2})^3 = 54\sqrt{2}$. Dit is maar half zo groot als de eerste oplossing!

Ten slotte

De tekeningen bij dit artikel zijn gemaakt met mijn programma 3D. Dit programma is (naast enkele andere) te downloaden van mijn homepage op internet: http://home-2.worldonline.nl/~lecluse

Toegift

Een lastige oefening:
Teken een tetraëder op de ‘normale’ manier, dus met een horizontaal grondvlak.
Teken nu de omhullende kubus, dus de kleinste kubus, waarin de tetraëder past.

Ontdek Internet!

Het jaar 2000 zal het jaar van communicatie zijn en vooral communicatie via moderne informatie- technologie. Internet, wereldwijde netwerken, steeds snellere computers; de ontwikkelingen zijn heel spannend, gaan razendsnel en zijn bijna niet te volgen. Maar zelf hiermee werken en experimenteren, dat kan wel! In Nederland hebben de Vrije Universiteit in Amsterdam en Deloitte & Touche, een vooraanstaand internationale zakelijke dienstverlener, het project TwinSite-2000 opgezet. Dit project geeft scholieren de mogelijkheid op een creatieve manier te werken met informatietechnologie, in dit geval Internet, en tegelijkertijd contacten te leggen in het buitenland. In het project staan communicatie en samenwerken centraal. Deze activiteit zou eventueel plaats kunnen vinden in het kader van het studiehuis.



Het project TwinSite-2000 is een competitie tussen teams van middelbare scholen (HAVO en VWO). Elke Nederlandse school moet hiervoor een partnerteam in een school in het buitenland zoeken. Tezamen vormen ze een TwinTeam dat door een leraar begeleid zal moeten worden. Doel is het maken van de beste TwinSite, een door een TwinTeam gemaakte website over een onderwerp dat beide teams interesseert.

Uit de gemaakte TwinSites moet natuurlijk ook de beste gekozen worden. Wij vinden het belangrijk dat dit op een eerlijke en betrouwbare manier gebeurt. Deloitte & Touche zal daarom webtechnologie gaan toepassen die de betrouwbaarheid van de evaluatie zal garanderen. De TwinTeams mogen hun ouders en vrienden vragen om als (partijdige) jury op te treden en hun mening in te zenden. Daarnaast zal er ook een deskundige jury zijn om een oordeel te geven. Bij deze beoordeling zal worden gekeken naar:

- de originaliteit met betrekking tot het thema;
- de wijze waarop de samenwerking tot synergie heeft geleid;
- de invulling van locale informatie;
- de toepassing van techniek.

Op 1 april 2000 (géén 1 april grap) zal de prijsuitreiking plaatsvinden door een van de grondleggers van Internet , Dr. Vincent Cerf. De prijs is 10000 gulden. Bovendien worden op deze dag de volgende activiteiten georganiseerd:

- een beroepenmarkt waar bedrijven laten zien hoe hun mensen gebruikmaken van nieuwe communicatietechnieken;
- de mogelijkheid de hele dag te Internetten op de 300 computers van de faculteit Informatica;
- lezingen van enkele beroemdheden.

Het TwinSite-2000 project kan alleen een succes worden wanneer enthousiaste teams hieraan meedoen. Lijkt het jullie leuk om met Internet te werken, met mensen in het buitenland contact te hebben en met een groep een mooie website te maken, meld je dan aan! Dat kan via het elektronische aanmeldingsformulier op onze website (http://www.cs.vu.nl/TwinSite-2000/) of gebruik hiervoor het aanmeldingsformulier in de brochure. Deze kun je aanvragen bij:
Ceciel Fruijtier (ceciel@few.vu.nl).

Om een buitenlands partnerteam te vinden kunnen jullie zelf op zoek gaan, bijvoorbeeld via het Internet. Een aantal handige sites hebben we alvast voor jullie opgezocht. Lukt dat niet, dan kan gebruik gemaakt worden van contacten die door mensen van VU en Deloitte & Touche zijn gelegd. De lijst van buitenlandse scholen wordt later dit jaar ter beschikking gesteld.

Per school is het mogelijk dat meer dan een team zich aanmeldt, echter elk team moet een aparte leraar als begeleider hebben. Omdat het bouwen van een website niet eenvoudig is, wordt voor leraren een cursus georganiseerd waarin technische aspecten van het maken van webpagina's aan de orde komen. Deze dag zal plaatsvinden op 5 juni 1999 op de Vrije Universiteit Amsterdam. Tot 21 mei kunnen leraren zich voor de cursus aanmelden.

Overige belangrijke data:
Voorlopige aanmelding:
1 juni 1999
Definitieve aanmelding:
1 september 1999
Inleveren TwinSite:
1 februari 2000
Prijsuitreiking:
1 april 2000

Voor meer informatie, breng een bezoek aan onze website:

http://www.cs.vu.nl/TwinSite-2000

bespreking

Klaske Blom
Van de acten van bekwaamheid
Universiteit Utrecht
Doctoraalscriptie
te bestellen door ƒ 22,50 over te maken op 4399632
t.n.v. K.A. Blom, Amersfoort, onder vermelding van:
'scriptie voor: naam, adres aanvrager'

Van oude akten die voorbijgingen

Een van de meest opvallende kenmerken van ons onderwijsstelsel is, dat je op twee manieren leraar in het voortgezet onderwijs kunt worden. Je kunt je bevoegdheid halen door een studie aan een universiteit of een tweedegraads lerarenopleiding. Je kunt ook eerst een bevoegdheid voor het basisonderwijs halen, en daarna, door in de avonduren een 'aktenstudie' te doen, een bevoegdheid voor het voortgezet onderwijs.
Voor ons is dat allemaal tamelijk vanzelfsprekend, maar in veel landen bestaat zo'n 'duale' mogelijkheid niet. De oorsprong van dat systeem gaat terug tot het begin van de vorige eeuw. Al de lageronderwijs-wet van 1806 bood onderwijzers de mogelijkheid om op hun diploma te laten aantekenen voor welke vakken zij 'speciale toelating' verworven hadden. Met zo'n aantekening voor wiskunde kon je - maar dat gold eigenlijk pas na 1815 - bijvoorbeeld benoemd worden tot 'onderwijzer in de wiskunde' op een Latijnse of Franse school. Met de l.o.wet van 1857 en de m.o.wet van 1863 werd deze mogelijkheid uitgebouwd tot een compleet systeem van l.o., m.o.-A en m.o.-B akten.
Sinds die tijd hebben duizenden onderwijzers en leraren gestudeerd voor wiskunde aktes, velen met succes, maar ongetwijfeld ook heel wat zonder.
Zonder hun zwoegen - want dat was het vaak - zou ons voortgezet onderwijs niet hebben kunnen bestaan. Het is zeker niet te veel gezegd als we stellen dat het hele fenomeen 'onderwijsakte' een heel belangrijk stuk onderwijsgeschiedenis vertegenwoordigt. Toch is er nauwelijks over geschreven. Ik ken alleen een artikel van G. Veldkamp, uit Euclides, jaargang 65. Een beetje een witte vlek, dus.

Daar is inmiddels voor een deel in voorzien. In mei 1998 studeerde Klaske Blom aan de UU af in de geschiedenis van de wiskunde op een scriptie onder de titel
'Van de acten van bekwaamheid' De middelbaar onderwijs akten KI en KV nader bekeken'.

Die titel verdient eerst misschien wat nadere toelichting. Het ging toch om mo-A en -B akten? De overheid voerde in 1863 echter geen aparte wiskundeakten in, maar middelbare akten in de 'wis- en werktuigkunde', in zwaarte vergelijkbaar met een universitaire studie wis- en natuurkunde. Dat bleek echter te hoog gegrepen. Vrijwel niemand zag kans zo'n studie in zijn - van 'haar' was voorlopig nog geen sprake - vrije tijd te voltooien. Spoedig zag de overheid zich genoodzaakt de akten te splitsen in een wiskunde en werktuigkunde akte. De wiskundeakten kregen de nummers KI en KV.
Overigens: tot in de jaren twintig was je met de KV akte alleen nog maar bevoegd voor de lagere klassen, de KI akte leverde geen enkele vorm van bevoegdheid op!

Klaske Blom beschrijft in haar heel boeiende scriptie het wel en wee van deze akten. Ze bestonden - met een nagenoeg ongewijzigd examenprogramma! - tot 1958. Toen werd eindelijk het programma gemoderniseerd en bij die gelegenheid werden ze weer omgedoopt in m.o.-A en m.o.-B akten. Maar dat was dus iets anders dan in 1863. Klaske Blom heeft zich geconcentreerd op de periode 1940-1958. Die beperking was niet alleen onvermijdelijk gezien de omvang van een afstudeerfase, deze afgrenzing bood ook het voordeel dat nog heel wat 'overlevenden' uit deze periode geïnterviewd konden worden. De resultaten van deze gesprekken - boeiende stukjes oral history - zijn in kadertjes door de tekst verspreid. Ze vormen wel de krenten in de pap!

Bloms scriptie bestaat eigenlijk uit twee delen. In de hoofdstukken 1 en 2 beschrijft zij de algemene geschiedenis van akten, zoals de historische context, studenten, opleiders en examinatoren, en de invloed van de veranderende wiskunde en wiskundedidactiek op de aktenstudie.In de hoofdstukken 3 en 4 gaat ze wat meer in detail in op het meetkundeonderdeel in de programma's. De aktenstudie komt in haar scriptie naar voren als een bijna onbeweeglijke wereld, waarop de toch dramatische ontwikkelingen in de wiskunde en de ver-

anderingen in didactische opvattingen vrijwel geen invloed hadden. Het geheel draaide vooral om een vraagstukkentraining, theoretisch werd niet zo diep gegraven. Relatie met het onderwijs was er nauwelijks. Didactische vragen speelden geen rol in de studie, aldus Blom. Hoewel de hoofdstukken die over de meetkunde handelen ook zeker de moeite waard zijn, heb ik toch het meest genoten van het algemene gedeelte. Daarin komt een wereld tot leven die in deze vorm - ook nu wordt er nog voor aktes gestudeerd - niet meer bestaat. Het jaren zwoegen voor een examen, dat dan in zijn totaliteit door vreemde examinatoren binnen een paar dagen werd afgenomen, en waarbij je, als je zakte, het volgend jaar alles moest overdoen, zo'n hardvochtig geheel bestaat niet meer. Ik heb nog een herinnering aan wat dat betekende. Op de MULO waar mijn vader onderwijzer was, was er ook een docent die jaar in, jaar uit 'opging' voor KV. Steeds kwam mijn vader weer met een somber verhaal thuis over wat er bij zijn collega nu weer mis was gegaan. Gelukkig heeft hij het uiteindelijk toch nog gehaald!

Klaske Blom heeft met haar scriptie eigenlijk een klein monument opgericht voor al die duizenden die door hun aktenstudie het Nederlandse voortgezet onderwijs van de grond tilden en gaande hielden. Dat monument hebben ze zeker verdiend. Voor iedereen die belang stelt in de geschiedenis van het Nederlandse wiskundeonderwijs en in al diegenen die daarin werkzaam waren, kan ik Bloms scriptie van harte aanbevelen.

Harm Jan Smid



Philibert Schogt
De wilde getallen
De Arbeiderspers Amsterdam, 1998
187 pagina's
ISBN 90 295 3731 0/NUGI 300

Ben je wel eens een avondje blijven 'zitten' op een wiskundevraagstuk? Heb je je ooit onzeker gevoeld voor de klas bij het uit je hoofd opschrijven van een ingewikkeld bewijs? Praat je thuis of op een gezellige avond met vrienden ook wel eens tegen een muur, als je over wiskunde begint?
Wie zulke ervaringen heeft, zal kunnen aanvoelen wat onderzoeker Isaac Swift zoal doormaakt in een episode van zijn leven waarin hij meent te moeten scoren met een publicatie over de wilde getallen.
Het boek is door Philibert Schogt sober en scherp geschreven en heeft een belangrijke eigenschap: je wilt het in één keer uitlezen. Daarbij hoef je niet beducht te zijn voor de schaars optredende wiskunde. Dat je misschien niet weet wat een 'geschikte calibratorverzameling' zou kunnen zijn, blokkeert absoluut niet. Een opmerking als 'nu ik het Wilde Getallen Probleem had opgelost was ik klaar voor de liefde' geeft méér te denken.

Freek Mahieu

Mededeling

Het Centrum van de stichting Vrouwen en Exacte Vakken (VeEX) heeft een nieuw post-adres:

VeEX
Esther de Boer van Rijklaan 55
3584 GL Utrecht

VeEX@wxs.nl

Aanbieding

De heer Engelschman biedt aan:
Euclides, compleet vanaf 1968;
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, compleet vanaf 1968.
Gratis af te halen.
tel. 026 - 4952398

40 jaar geleden

Het werk van Dieke van Hiele steunt op de modernste inzichten van de Gestaltpsychologie, op grond waarvan men er in de didaktiek in de eerste plaats naar zal streven, de leerlingen de leerstof als een geheel te laten beleven. Slechts zeer weinig methoden voldoen nog aan dit uitgangspunt. Ze gaat n.l. bij het samenstellen van het materiaal uit van vier wetten uit de apperceptieleer (leer van het waarnemen van de Gestaltpsychologie) n.l.

1 De wet der overeenkomst: overeenkomstige figuren en overgangen worden in de waarneming veelal als totalen waargenomen.
2 De wet der naburigheid: in de waarneming worden delen, die zich in elkaars nabijheid bevinden gemakkelijk als gehelen waargenomen.
3 De wet der geslotenheid: gesloten figuren worden gemakkelijker waargenomen dan open figuren. In de waarneming heeft men de neiging open figuren te willen sluiten.
4 De wet der goede voortzetting: in de waarneming heeft men de neiging een figuur zo voort te zetten, dat de struktuur behouden blijft.

Vele moeilijkheiden, die in het meetkunde-onderwijs optreden, zijn te wijten aan het feit, dat de docenten zich van deze wetten niet of nauwelijks bewust zijn en daardoor leggen ze te weinig de nadruk op de visuele meetkundige strukturen, waarover de leerlingen moeten kunnen beschikken. Uitvoerig laat ze zien, hoe men echter eerst aan bekende dingen, b.v. de kubus, de kinderen laat ervaren wat meetkundig struktureren betekent, omdat eerst dan de leerlingen in staat zijn zelf de werkelijkheid om zich heen te plaatsen in de meetkundige kontekst, d.i. het waarnemingsveld te zien met betrekking tot het meetkundige aspekt. In dit eerste stadium van het aanvankelijk meetkunde onderwijs, laat ze, zoals ze dat noemt, “de kinderen denkend doen met hanteerbaar materiaal als hulpmiddel”. Uitgaande van de kubus, het regelmatige viervlak en achtvlak, komen de netwerken, het maken van modellen, de symmetrie (zowel symmetrie-as, als middelpunt van symmetrie), de ruit, de grondkonstrukties en de hoeken aan de orde. Het gaat hierbij echter niet om de bewijzen van de eigenschappen, neen, om het waarnemen, het naamgeven, het ordenen van de waargenomen figuren naar hun symmetrie-eigenschappen en het aanbrengen van de hierbij behorende taalstrukturering.

Hermen J. Jacobs jr. in: **Euclides 34** (1958-1959), blz. 247

Werkblad

Opgave 1 Gemiddelde snelheid

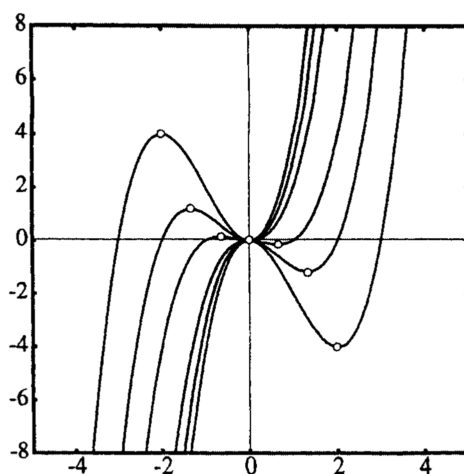
Van een bewegend object wordt de snelheid v (in m/sec) afhankelijk van de tijd t (in sec) op het tijdsinterval [0,4] gegeven door de formule:

$v(t) = 8 - t\sqrt{t}$

5p **1** □ Bereken de gemiddelde snelheid van het object op het tijdsinterval [0, 4].

Opgave 2 Een verzameling toppen

Voor elke waarde van a wordt in het Oxy-vlak een kromme gegeven met vergelijking $y = x^3 + ax^2$.
In figuur 1 zijn de krommen getekend voor $a = \pm1, \pm2, \pm3$.



figuur 1

Elk van deze krommen, uitgezonderd de kromme voor $a = 0$, heeft twee toppen. Al deze toppen vormen zelf ook weer een kromme.

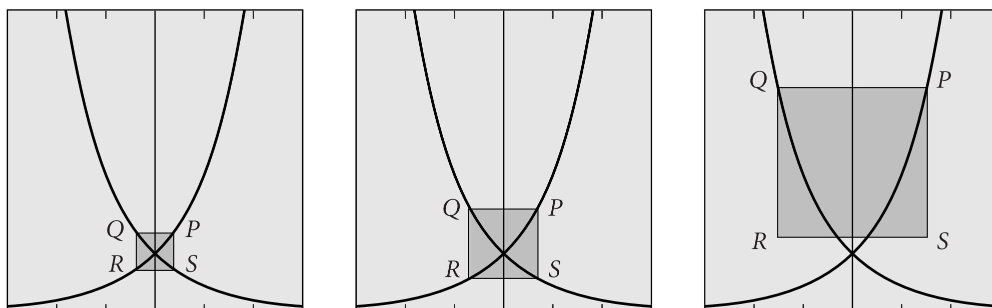
7p **2** □ Leid een vergelijking af voor deze kromme.

Uit: het examen vwo Wiskunde B Profi tijdvak 2, juni 1998

Werkblad

Opgave 5 Hangende vierkanten

Op de grafieken van $y = e^x$ en $y = e^{-x}$, getekend in een vierkant assenstelsel, liggen respectievelijk de punten *P* en *Q* zodanig dat het lijnstuk *PQ* evenwijdig is aan de *x*-as. Daarbij ligt *P* rechts van de *y*-as. De punten *R* en *S* worden zodanig in het *Oxy*-vlak geplaatst, dat *PQRS* een vierkant is, waarbij *RS* onder *PQ* ligt.
Bij variërende positie van *P* op de grafiek, varieert de hoogte van het lijnstuk *RS*. In figuur 3 zijn een paar mogelijke situaties getekend.



figuur 3

8p **7** ☐ Bereken de exacte coördinaten van *P* voor het geval de afstand van het lijnstuk *RS* tot de *x*-as minimaal is.

Uit: het examen vwo Wiskunde B Profi tijdvak 2, juni 1998

Opgave 693

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

Recreatie

Onlangs kocht ik op een speelgoedveiling het spelletje ALTIJD SCHUIN!, uitgegeven door SPEAR'S SPELEN onder nummer 30521. In het deksel staat de handleiding:
'Een denkspel, dat wel wat moeite kosten zal, maar een interessant tijdverdrijf is. De bedoeling is, twee maal 4 figuren van plaats te doen verwisselen, zonder elkaar te raken en zonder dat ze over elkaar heen springen.
Begin met de pionnen op het speelplan te zetten, en wel de ene kleur op 1, 6, 11 en 16, en de andere kleur op 5, 10, 15 en 20. Om het nu wat gemakkelijker te maken, volgen hier de eerste 5 zetten: van 5 naar 13, 16 naar 8, 10 naar 4, 11 naar 17 en 15 naar 3. Hoe het verder gaat, moet je zelf maar uitvinden.
Veel plezier ermee!'

Daarna volgen twee oplossingen, waarvan de eerste luidt:

1. 5 - 13 ; 16 - 8
2. 10 - 4 ; 11 - 17
3. 15 - 3 ; 6 - 18
4. 13 - 9 ; 8 - 12
5. 20 - 2 ; 1 - 19
6. 9 - 13 ; 12 - 8
7. 13 - 1 ; 8 - 20
8. 4 - 16 ; 17 - 5
9. 3 - 11 ; 18 - 10
10. 2 - 6 ; 19 - 15

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Als iedere kleur 10 zetten doet is het karwei geklaard. Maar ... wat betekent dan 'zonder elkaar te raken'? Als het lopers van het schaakspel zijn, dan vallen de kleuren elkaar toch aan bij deze oplossing?
Recreatie 693 was geboren: speel het spelletje ALTIJD SCHUIN! volgens alle spelregels. (De ene kleur mag de andere kleur dus onderweg niet aanvallen.)
Ik heb inderdaad een oplossing gevonden!!
(Ieder doet dan 18 zetten.)

Als u ook een oplossing vindt, zend deze dan binnen 1 maand in en als beloning ontvangt u 5 ladderpunten voor de doorlopende puzzelwedstrijd.

Recreatie

Oplossing 688

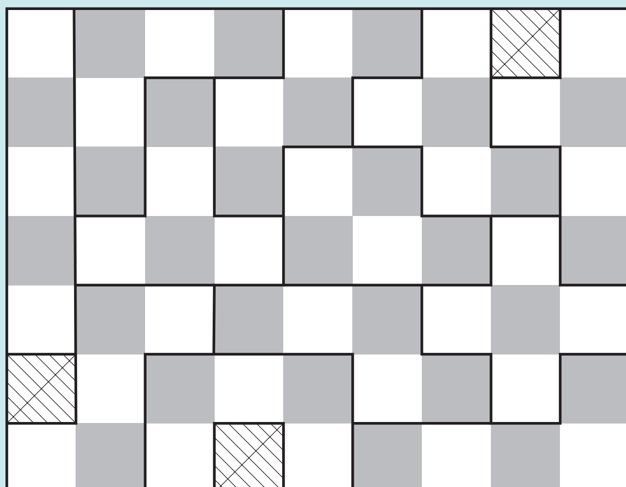
Als we 5 vierkantjes met de zijden aan elkaar plakken ontstaat een zogenaamd pentomino. Dit kan op 12 verschillende manieren. Als we hiermee figuren maken dan mogen we de stukjes draaien (dus in een andere stand neerleggen) of spiegelen (d.w.z. de achterkant komt nu boven te liggen). Als we rechthoeken gaan leggen, dan vinden we:
2 oplossingen voor een 3 × 20 rechthoek.
368 oplossingen voor een 4 × 15 rechthoek.
1010 oplossingen voor een 5 × 12 rechthoek.
2339 oplossingen voor een 6 × 10 rechthoek.

Als we de pentomino's niet mogen spiegelen, dan zijn er 18 verschillende puzzelstukjes. Alle rechthoeken van 3 × 30, 5 × 18, 6 × 15 en 9 × 10 zijn te maken. Deze worden de 'one-sided pentominoes' genoemd.

Als ze ook nog in dezelfde stand moeten blijven (dus draaien is verboden), dan zijn er 63 verschillende stukjes mogelijk. Een rechthoek van 15 × 21 is hiermee te maken. Ze heten de 'orientated, one-sided pentominoes'.

Tot slot kan men er een schaakbordkleuring op aanbrengen. Dit kan op vele manieren. Een voorbeeld van 12 'one-sided pentominoes' met schaakbordkleuring was recreatie 690. Doe hierbij 3 zwarte velden en men kan een 6 × 9 schaakbord bedekken. De achterkant van de stukjes komt dus niet boven te liggen. (Spiegelen verboden!)

Met 3 inwendige zwarte gaten zijn er 0 oplossingen.
Met 2 inwendige zwarte gaten zijn er 10 oplossingen.
Met 1 inwendig zwart gat zijn er 8 oplossingen.
Met 0 inwendige zwarte gaten is er 1 oplossing!!



Met 64 punten is winnaar van een boekenbon van ƒ 50,–:

Riet Roos-Rietkerk
Marketentster 181
2401 JB Alphen a/d Rijn

Heel hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in dit schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Voor of op die datum dienen uw mededelingen bij de hoofdredacteur te zijn. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
8	24-06-99	13-05-99
1	02-09-99	08-07-99
2	14-10-99	02-09-99
3	25-11-99	14-10-99

Data nieuwe schooljaar
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur: cph@xs4all.nl

Examenbesprekingen
vbo-B:
wo. 19 mei 1999:
19.00 - 21.00
vbo/mavo C/D:
do. 20 mei 1999:
15.00 - 18.00
havo-A:
do. 20 mei 1999:
16.00 - 18.00
havo-B:
ma. 31 mei 1999:
18.30 - 20.30
vwo-A:
ma. 31 mei 1999:
16.00 - 18.00
vwo-B:
di. 25 mei 1999:
16.00 - 18.00
Zie blz. 200 en 201

Studiedag Historische Kring
zaterdag 29 mei 1999
HKRWO
Ed de Moor
030 - 2611611
Zie aankondiging blz. 187

Zomeruniversiteit wiskundedidactiek
do. 15 tot en met
wo. 21 juli 1999
Louvain/Leuven België
http://ramses.umh.ac.be/noel/univete/Univetenl.htm
Zie ook blz. 205

Vakantiecursus CWI
TU Eindhoven
do. 26 aug. 1999:
11.00 - 16.00
vr. 27 aug. 1999:
10.00 - 15.00
CWI Amsterdam
vr. 3 sept. 1999:
15.30 - 20.30
za. 4 sept. 1999:
10.00 - 15.00
Zie aankondiging blz. 232

APS-conferentie Tweede fase:
Praktijkervaringen met praktische opdrachten
woensdag 6 oktober 1999
Infopunt wiskundeonderwijs
APS: 030 - 2856722
Nadere informatie volgt

Studiedag: Praktische opdrachten voor alle exacte vakken
donderdag 7 oktober 1999
VeEx en BEeN, Utrecht
info: veex@wxs.nl
Nadere informatie volgt

Scholierenmanifestaties Stichting Wetenschap en Techniek
ma. 11 oktober -
vr. 15 oktober 1999
Voor leerlingen 3e en 4e klas havo/vwo.
Folders zijn inmiddels op de scholen.

Voorronde wiskunde A-lympiade
vrijdag 26 november 1999
Freudenthal instituut
030 - 2611611
alympiade@fi.uu.nl
www.fi.uu.nl/Alympiade

Nationale Wiskunde Dagen
vr. 4 en za. 5 februari 2000
Freudenthal instituut
030 - 2611611
nwd@fi.uu.nl
www.fi.uu.nl/nwd

9th International Congress on Mathematical Education (ICME)
31/6/00 - 6/8/00
Tokyo, Japan
www.ma.kagu.sut.ac.jp/~icme9/

Internetsites voor wiskundedocenten:

NVvW website
Bezoek regelmatig de website van de NVvW. Boordevol actuele informatie
www.euronet.nl/~nvvw

Archief WiskundE-brief
skyline.www.cistron.nl/wiskunde/brief/wb_main.htm

Zonsverduistering 11 augustus 1999
www.astro.uu.nl/~wwwzenit/eclipsweb

Wiskunde-nieuwsgroep
Voor de puzzelaars:
alt.math.recreational

Free-ware

Mayura, een goed technisch tekenprogramma
www.mayura.com

Funiter, iteratie van functies en fractals
www.xs4all.nl/~stijnw/Funiter/FuniterDutch.html

Suggesties voor interessante sites of interessante freeware voor wiskundedocenten graag zenden aan
Kees Hoogland
e-mail: cph@xs4all.nl

Adv. Casio

herhalen uit
Euclides 74/5
omslag pag. III

Software bij

Moderne wiskunde 7e editie Netwerk 2e editie

Het gebruik van software is een integraal onderdeel van de examenprogramma's vwo wiskunde. Bij een aantal vwo-delen van *Moderne wiskunde 7e editie* en *Netwerk 2e editie* worden diskettes met leerling-licenties meegeleverd. De software komt overeen met het uitgangspunt van de Tweede Fase: zelfstandig werken en leren.

Diskettes met leerling-licenties bij:

vwo wiskunde	Domein	Software	Moderne wiskunde 7e editie	Netwerk 2e editie
A1	Statistiek en kansrekening	VU-Stat voor Windows	vwo A1 deel 3	vwo A1 deel 3
A2	Lineair programmeren	Orstat-LP Windows	vwo A2 deel 3	vwo A2 deel 2
A2	Discrete Dynamische modellen	Dynasys	vwo A2 deel 3	–
B1	Normale verdeling en toetsen van hypothesen	VU-Stat voor Windows	vwo B1 deel 5	vwo B1 deel 5
B1	Continue Dynamische Modellen	VU-Diff	vwo B1 deel 5	vwo B1 deel 5
B2	Voortgezette Meetkunde	Cabri Geometry II	vwo B2 deel 1	vwo B2

Schoollicenties
Gebruikers van *Moderne wiskunde 7e editie* en *Netwerk 2e editie* voor de Tweede Fase kunnen de schoollicenties (netwerk-versies) van deze nieuwe Windows-programma's met aanmerkelijke korting aanschaffen.

Neem voor meer informatie contact op met onze voorlichter Elka van der Steeg, tel (050) 522 63 11, fax (050) 522 62 55, email: voorlichting.vo.exact@wolters.nl

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

Wolters Noordhoff

419/9104